اقلیدس
کتاب اول
مترجم حذیفه

# اِقلیدس

## کتاب اول

مترجم حذیفہ

# بسم الله الرحمن الرحيم

## تعریفات

۱. **نُقْطَہ** وہ ہے جس کا کوئی جز نہ ہو۔

۲. و **خَطّ** طول ہے بلا عرض کے۔

۳. و خط کی دونوں غایات نقطے ہیں۔

۴. و **خطِ مُسْتَقِیْم** وہ خط ہے جو کھینچی گئی ہو ان نقاط پہ جو اس کی دونوں غایات کے درمیان اسی میں ہوں۔

۵. و **بَسِیْط** وہ ہے جس میں خالص طول و عرض ہوں۔

٦. و بسیط کی غایات خطوط ہیں۔

۷. و **بسیطِ مُسَطَّح** وہ بسیط ہے جو بچھائی گئی ہو ان خطوط مستقیم پہ جو اس کی دو غایات متقابل کے درمیان اسی میں ہوں۔ و اسے ہی **سطح** کہتے ہیں۔

۸. و **زَاوِیَۂ مُسَطَّحَہ** ایک خط کا دوسری کے جانب جھکنا ہے جبکہ وہ آپس میں ملی ہوں لیکن ایک سیدھ میں نہ ہوں۔

۹. **زاویۂ مستقیم اضلاع** وہ زاویہ ہے جس کو گھیرنے والی خطوط مستقیم ہوں۔

۱۰. جب ایک خطِ مستقیم پہ دوسری خطِ مستقیم قائم ہو و اس کے دونوں جوانب کے زوایا متساوی ہوں تو قائم ہونے والی خط **عُمُوْد** ہے دوسری پہ۔ و دونوں زوایا میں سے ہر ایک **قَائِمَہ** ہے۔

۱۱. و **مُنْفَرِجَہ** وہ زاویہ ہے جو قائمہ سے بڑا ہو۔

۱۲. و **حَادَّہ** وہ زاویہ ہے جو قائمہ سے چھوٹا ہو۔

۱۳. چیز کی غایت اس کی **حَدّ** ہے۔

۱۴. **شَکْل** وہ ہے جس کو ایک یا زیادہ حدود گھیرے ہوں۔

[توضیح: گھیرنے والے کو **مُحِیْط** کہا جاتا ہے]

۱۵. **دَائِرَہ** وہ شکلِ مسطح ہے جس کو ایک خط گھیرے ہو و اس کے اندر ایک ایسا نقطہ ہو کہ جس سے محیط تک جانے والی تمام خطوط متساوی ہوں۔
۱۶. و وہ نقطہ **مَرْکَزِ دائرہ** ہے۔
۱۷. و **قُطْرِ دائرہ** وہ خط ہے جو مرکز سے گزرتے ہوئے محیط سے محیط تک گئی ہو۔ و یہ دائرہ کو نصف میں تقسیم کرتی ہے۔
۱۸. و **نِصْف دائرہ** وہ شکل ہے جس کو نصف محیط و قطر گھیرے ہوں۔ و اس کا مرکز وہی ہے جو دائرہ کا ہے۔
۱۹. **اشکالِ مستقیمِ اضلاع** وہ ہیں جن کو خطوط مستقیم گھرے ہوں۔ پھر **تین ضلعی اشکال** وہ ہیں جن کو تین اضلاع گھیرے ہوں، و **چار ضلعی** وہ ہیں جن کو چار اضلاع گھیرے ہوں، و **کثیر ضلعی** وہ ہیں جن کو چار سے زائد اضلاع گھیری ہوں۔
[توضیح: تین ضلعی شکل کو **مُثَلَّث** کہا جاتا ہے، لیکن **مُرَبَّع** چار ضلعی شکل کو نہیں کہا جاتا بلکہ اس کی ایک نوع کو کہا جاتا ہے جس کا ذکر آگے آ رہا ہے۔]
۲۰. و مثلث میں سے **متساویٔ اضلاع** ہے جس کے تینوں اضلاع متساوی ہوتے ہیں، و **متساویٔ ساقین** ہے جس کے دو اضلاع متساوی ہوتے ہیں، و **مختلفِ اضلاع** ہے جس کے تینوں اضلاع مختلف ہوتے ہیں۔
۲۱. و پھر مثلث میں سے **قائمِ زاویہ** ہے جس کا ایک زاویہ قائمہ ہوتا ہے، و **منفرجِ زاویہ** ہے جس کا ایک زاویہ منفرجہ ہوتا ہے، و **حادِ زوایا** ہے جس کے تینوں زوایا حادہ ہوتے ہیں۔
۲۲. و چار ضلعی اشکال میں سے **مربع** ہے جو قائم زاویہ و متساویٔ اضلاع ہے، و **مُسْتَطِیْل** ہے جو قائم زاویہ ہے لیکن متساویٔ اضلاع نہیں ہے، و **معین** ہے جو متساویٔ اضلاع ہے لیکن قائم زاویہ نہیں ہے، و **شبیہ معین** وہ ہے جس کے اضلاع متقابل و زوایا متقابل متساوی ہوں لیکن وہ نہ قائم زاویہ ہے و نہ متساویٔ اضلاع، و **مُنْحَرِف** وہ ہے جو مذکور اقسام میں سے نہ ہو۔
۲۳. و **خطوطِ مُتَوَازِی** وہ خطوطِ مستقیم ہیں جو ایک ہی سطح میں ہوں، و دونوں جوانب کھینچی جائیں، گر چہ غیر نہایہ تک، تو بھی آپس میں نہ ملیں۔

# اصول تقدیر

۱. میں کہتا ہوں کہ ایک نقطہ سے دوسرے تک خط مستقیم کھیچی جا سکتی ہے۔
۲. و ہر خطِ مستقیم میں ایک خط مستقیم بڑھائی جا سکتی ہے۔
۳. و ہر نقطہ سے ہر بُعد پہ ایک دائرہ بنایا جا سکتا ہے۔

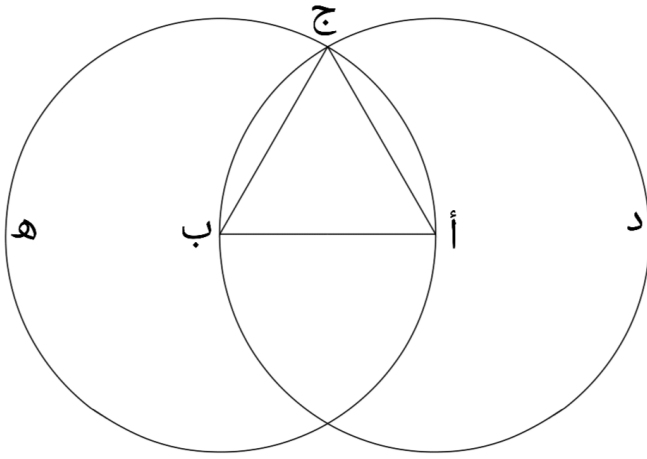
[توضیح: **بُعْد** کا معنی ہے دوری، و اس کی جمع ہے **اَبْعَاد**، و لہذا طول، عرض، عمق کو ایک ساتھ تین ابعاد کہا جائے گا۔]

۴. و تمام قائمات متساوی ہوتے ہیں۔
۵. جب دو خطوط پہ ایک خط واقع ہو جس کے ایک جانب کے دونوں زوایا داخلی ایک ساتھ دو قائمات سے چھوٹے ہوں، تو وہ دونوں خطوط اگر اس جانب غیر نہایہ تک بڑھائی جائیں تو آپس میں ضرور ملیں۔

# علم جامع

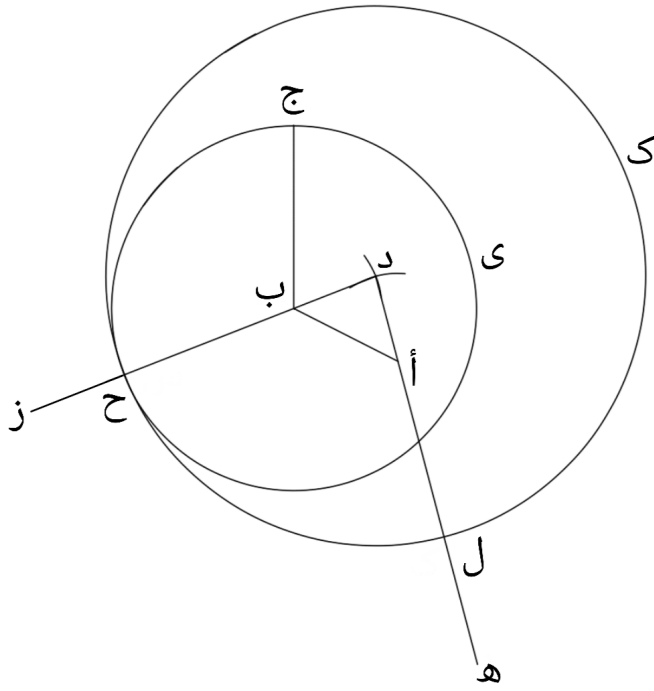
۱. چیزیں جو ایک چیز کے متساوی ہوتی ہیں، وہ ایک دوسرے کے متساوی ہوتی ہیں۔
۲. و اگر متساوی چیزوں میں متساوی چیزیں جمع کی جاتی ہیں تو ان کے اجتماعات متساوی ہوتے ہیں۔
۳. و اگر متساوی چیزوں سے متساوی چیزیں جدا کی جاتی ہیں تو ان کے بقیات متساوی ہوتے ہیں۔
۴. و چیزیں جو ایک دوسرے پہ ایسے منطبق ہوتی ہیں کہ کوئی کسی سے زیادہ نہیں ہوتی تو وہ متساوی ہوتی ہیں۔
۵. و کل جز سے بڑا ہوتا ہے۔

# مسئلہ ۱

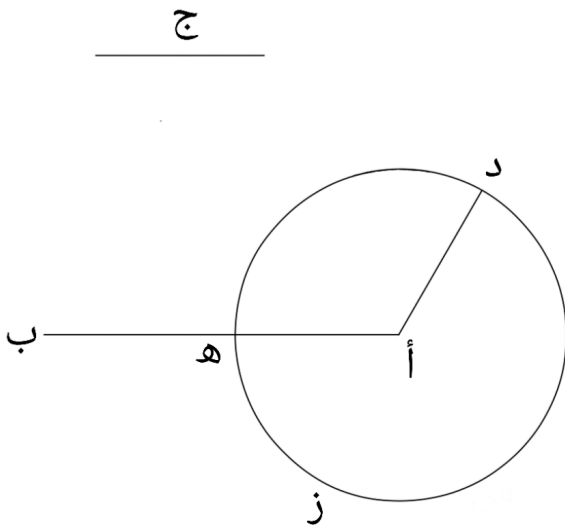
ایک معلوم خطِ مستقیم متناہی پہ مثلث متساوئ اضلاع بنانا۔

فرض کرو کہ وہ خط مستقیم أب ہے، تو ہمیں أب پہ مثلثِ متساوئ اضلاع بنانا ہے۔ تو ہم نے أ کو مرکز بنایا و اس سے ب دوری پہ دائرہ بجد بنایا۔ پھر ب کو مرکز بنایا و اس سے أ دوری پہ دائرہ أجھ بنایا۔ پھر ج، جہاں دونوں دائرات نے ایک دوسرے کو کاٹا، وہاں سے أ و ب تک خطِ مستقیم جأ و خطِ مستقیم جب بنایا۔ و چونکہ نقطہ أ دائرہ بجد کا مرکز ہے، تو أج و أب متساوی ہوئے۔ و نقطہ ب دائرہ أجھ کا مرکز ہے، تو بج و بأ متساوی ہوئے۔ تو أج و بج دونوں أب کے متساوی ہوئے۔ و وہ چیزیں جو کسی ایک چیز کے متساوی ہوں تو ایک دوسرے کے متساوی ہوتی ہیں۔ لہذا أب و أج و بج تینوں متساوی ہوئے، تو مثلث أبج متساوئ اضلاع ہوا۔ و اسے بنانا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۲

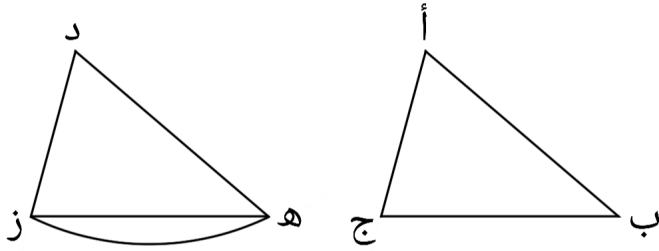
معلوم خطِ مستقیم کے متساوی خطِ مستقیم ایک معلوم نقطہ سے بنانا۔

فرض کرو کہ أ معلوم نقطہ ہے، و بج معلوم خطِ مستقیمِ ہے، تو أ سے بج کے متساوی ایک خطِ مستقیم بنانا مطلوب ہوا۔ تو اولاً ہم نے أ سے ب تک ایک خطِ مستقیم بنایا۔ پھر اس پہ متساوئ اضلاع مثلث أبد بنایا (جیسے مسئلہ۱ میں بنایا تھا)۔ پھر دب و دأ کو بڑھا کے دز و دھ بنایا۔ پھر ب سے ج دوری پہ دائرہ حجی بنایا، جس نے دز کو ح پہ کاٹا، تو بج و بح

متساوی ہوئیں۔ پھر د سے ح دوری پہ دائرہ کلح بنایا، جس نے دھ کو ل پہ کاٹا، تو دل و دح متساوی ہوئیں۔ و معلوم ہے کہ دأ و دب متساوی ہیں، تو باقی أل و باقی بح متساوی ہوئیں۔ و معلوم ہے کہ بج و بح متساوی ہیں، تو خطوط مستقیم أل و بج متساوی ہوئیں۔ کیونکہ وہ چیزیں جو ایک چیز کے متساوی ہوں تو آپس میں متساوی ہوتی ہیں۔ و یہی مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۳

دو غیر متساوی خطوط مستقیم میں سے جو بڑی ہے اس سے چھوٹی کے مثل خط کو منقطع کرنا۔

فرض کرو کہ بڑی خط أب ہے و چھوٹی خط ج ہے، تو أب سے ج کے متساوی خط مستقیم کو منقطع کرنا ہمارا مطلوب ہوا۔ تو ہم نے نقطہ أ پہ ج کے مثل خط مستقیم أد بنایا (جیسے مسئلہ۲ میں بنایا تھا)۔ پھر أ سے د دوری پہ دائرہ دھز بنایا، تو أد و أھ متساوی ہوئیں۔ لیکن أد ج کے متساوی ہے، تو أھ بھی ج کے متساوی ہوئی۔ تو ہم نے أب سے جو بڑی خط ہے أھ منقطع کیا جو چھوٹی خط کے متساوی ہے جیسا کہ مطلوب تھا۔

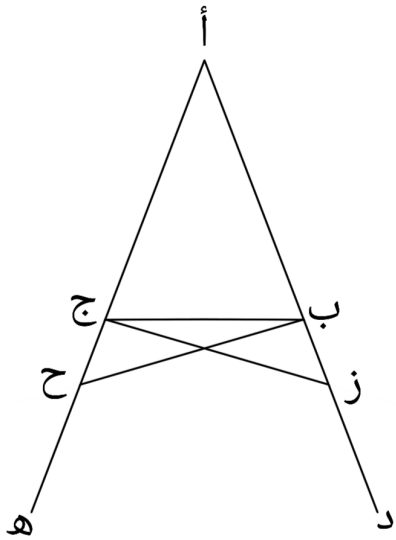
# مسئلہ ۴

اگر دو مثلثات میں سے ایک کے دو اضلاع حسب ترتیب دوسرے کے دو اضلاع کے متساوی ہیں، و ان کے زوایا جو ان اضلاع سے گھرے ہیں وہ بھی ایک دوسرے کے متساوی ہیں، تو ان دونوں کے قاعدات بھی ایک دوسرے کے متساوی ہوں گے، و وہ دونوں مثلثات بھی ایک دوسرے کے متساوی ہوں گے، و ان اضلاع سے معلَّق باقی زوایا بھی ان کی نظیر باقی زوایا کے متساوی ہوں گے۔

فرض کرو کہ أبج و دھز دو مثلثات ہیں جن کے دو اضلاع أب و أج متساوی ہیں دھ و دز کے حسب ترتیب، یعنی أب دھ کے و أج دز کے، و زاویہ بأج متساوی ہے زاویہ ھدز کے۔ میں کہتا ہوں کہ باقی ضلع بج متساوی ہے باقی ضلع ھز کے، و مثلث أبج متساوی ہے مثلث دھز کے، و باقی زوایا جو اضلاع متساوی سے معلّق ہیں، وہ متساوی ہیں ان کی نظیر باقی زوایا کے، یعنی أبج دھز کے و أجب دزھ کے۔ کیونکہ جب مثلث أبج کو دھز پہ منطبق کیا، و نقطہ أ کو نقطہ د پہ واقع کیا، و ضلع أب کو دھ پہ واقع کیا، تو أب و دھ کے متساوی ہونے کی وجہ سے نفطہ ب نقطہ ھ پہ منطبق ہوا، تو زاویہ بأج ھدز کے متساوی ہونے کی وجہ سے ضلع أج دز پہ منطبق ہوا، تو أج و دز کے متساوی ہونے کی وجہ سے نقطہ ج نقطہ ز پہ منطبق ہوا۔ لیکن نقطہ ب نقطہ ھ پہ منطبق ہے، تو ضلع بج ضلع ھز پہ منطبق ہوا، کیونکہ اگر ب ھ پہ منطبق ہو و ج ز پہ منطبق ہو لیکن بج ھز پہ منطبق نہ ہو تو دو خطوط مستقیم ایک رقبہ کو گھیریں گی جو کہ مستحیل ہے۔ لہذا بج ھز پہ منطبق ہوا و اس کے متساوی ہوا۔ لہذا مثلث أبج متساوی ہوا مثلث دھز کے۔ و باقی زوایا باقی زوایا پہ منطبق ہوئے و ان کے متساوی ہوئے، یعنی زاویہ أبج دھز کے و زاویہ أجب دزھ کے۔

لہذا اگر دو مثلثات میں سے ایک کے دو اضلاع حسب ترتیب دوسرے کے دو اضلاع کے متساوی ہیں، و ان کے زوایا جو ان اضلاع سے گھرے ہیں وہ بھی ایک دوسرے کے متساوی

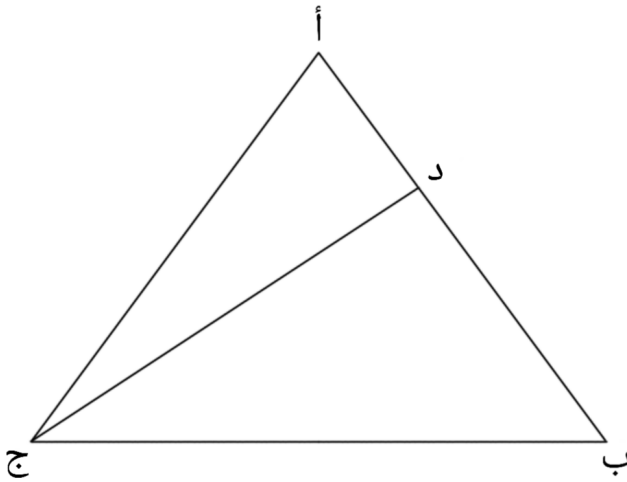
ہیں، تو ان دونوں کے قاعدات بھی ایک دوسرے کے متساوی ہوں گے، و وہ دونوں مثلثات بھی آپس میں متساوی ہوں گے، و ان اضلاع سے معلّق باقی زوایا بھی ان کی نظیر باقی زوایا کے متساوی ہوں گے۔ اسی چیز کو ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۵

مثلث متساویٔ ساقین میں قاعدہ کے دونوں زوایا ایک دوسرے کے متساوی ہوتے ہیں، و اگر اس کے اضلاع متساوی کو مزید بڑھایا جائے تو قاعدہ کے نیچے بننے والے دونوں زوایا بھی ایک دوسرے کے متساوی ہوں گے۔

فرض کرو کہ أبج ایک متساویٔ ساقین مثلث ہے جس کے دو اضلاع أب و أج ایک دوسرے کے متساوی ہیں، و بد و جھ خطوط مستقیم ہیں جو أب و أج سے نکالی گئی ہیں۔ تو میں کہتا ہوں کہ زاویہ أبج متساوی ہے أجب کے، و زاویہ جبد متساوی ہے بجھ کے۔ تو خط بد پہ کوئی نقطہ ز اخذ کیا، و خط مستقیم أھ سے أز کے متساوی خط أح کاٹا۔ پھر خطوط مستقیم زج و حب بنایا۔ چونکہ أز متساوی ہے أح کے و أب متساوی ہے أج کے، تو دو خطوط مستقیم زأ و أج متساوی ہوئیں دو خطوط مستقیم حأ و أب کے حسب ترتیب۔ و دونوں ایک مشترک زاویہ زأح کو گھیرے ہیں، تو قاعدہ زج متساوی ہوا قاعدہ حب کے۔ تو مثلث أزج متساوی ہوا مثلث أحب کے، و باقی زوایا جو اضلاع متساوی سے معلق ہیں متساوی ہوئے ان کے نظیر باقی زوایا کے، یعنی أجز أبح کے، و أزج أحب کے۔ و چونکہ کل أز متساوی ہے کل أح کے، جس میں أب متساوی ہے أج کے، تو باقی بز متساوی ہوا باقی جح کے۔ لیکن زج متساوی ہے حب کے، تو دو خطوط مستقیم بز و زج متساوی ہوئیں دو خطوط مستقیم جح و حب کے حسب ترتیب۔ و معلوم ہے کہ زاویہ بزج متساوی ہے زاویہ جحب کے، و قاعدہ بج ان دونوں میں مشترک ہے،

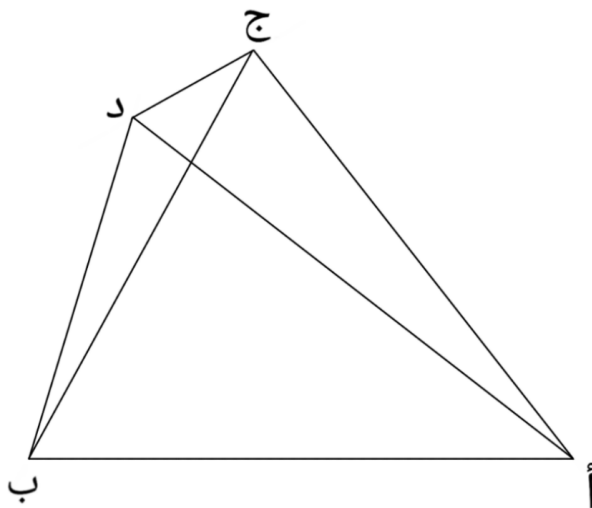
تو مثلث بزج متساوی ہوا مثلث جحب کے، و باقی زوایا جو اضلاع مستقیم سے معلق ہیں وہ ان کے نظیر زوایا کے متساوی ہوئے، یعنی زاویہ زبج متساوی ہوا حجب کے، و زاویہ بجز متساوی ہوا جبح کے۔ و معلوم ہے کہ کل زاویہ أبح متساوی ہے کل زاویہ أجز کے جس میں جبح متساوی ہے بجز کے، تو باقی زاویہ أبج متساوی ہوا أجب کے۔ و یہ دونوں زوایا مثلث أبج کے قاعدہ پہ بنے ہیں، و زبج جو متساوی ہے حجب کے وہ قاعدہ کے نیچے بنے ہیں۔
تو ثابت ہوا کہ مثلثِ متساوئ ساقین پہ بنے ہوئے زوایا ایک دوسرے کے متساوی ہوتے ہیں، و اگر اس کے اضلاع متساوی کو مزید نکالا جائے تو اس کے نیچے بننے والے زوایا ایک دوسرے کے متساوی ہوں گے۔ و یہی مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۶

اگر ایک مثلث کے دو زوایا متساوی ہیں، تو ان پہ قائم اضلاع بھی متساوی ہوں گے۔

فرض کرو کہ أبج ایک مثلث ہے جس کا زاویہ أبج متساوی ہے زاویہ أجب کے۔ میں کہتا ہوں أب متساوی ہے أج کے۔ چونکہ اگر ضلع أب غیر متساوی ہو أج کے، تو ان دونوں میں سے کوئی ایک دوسرے سے بڑا ہوگا۔ تو فرض کرو کہ أب بڑا ہے، و دب أب سے کاٹا گیا ہے و أج کے متساوی ہے، و دج ایک خط مستقیم ہے۔ تو چونکہ دب متساوی ہے أج کے، و بج مشترک ہے، تو دو اضلاع دب و بج حسب ترتیب متساوی ہوئے دو اضلاع أج و جب کے۔ و معلوم ہے کہ زاویہ دبج متساوی ہے زاویہ أجب کے۔ تو قاعدہ دج متساوی ہوا قاعدہ أب کے۔ تو مثلث دبج متساوی ہوا مثلث أبج کے یعنی چھوٹا بڑے کے۔ و یہ مستحیل ہے۔ لہذا أب أج کے غیر متساوی نہیں ہے، یعنی متساوی ہے۔

لہذا اگر مثلث کے دو زوایا ایک دوسرے کے متساوی ہیں، تو ان پہ جو اضلاع ہیں وہ بھی ایک دوسرے کے متساوی ہوں گے۔ اسی کو ثابت کرنا مطلوب تھا۔

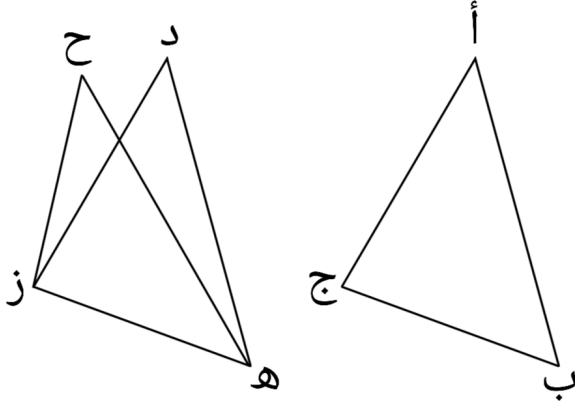
# مسئلہ ۷

ایک خط مستقیم پہ دو معلوم خطوط مستقیم کے متساوی حسب ترتیب ایسی دو خطوط مستقیم نہیں بنائیں جا سکتیں جو ایک ہی جانب میں مختلف نقاط پہ ملیں لیکن ان کی غایات وہی ہوں جو معلوم خطوط مستقیم کی ہیں۔

کیونکہ اگر ایسا ہوا تو دو خطوط مستقیم أد و دب کے متساوی دیگر دو خطوط مستقیم أج و جب حسب ترتیب ایک ہی خط مستقیم أب پہ واقع ہوئیں، و ایک ہی جانب میں مختلف نقاط ج و د پہ ملیں، و ان کی غایات بھی ایک ہی ہوئیں۔ تو جأ دأ کے متساوی ہوئی جن کی غایت أ ہوا و جب دب کے متساوی ہوئی جن کی غایت ب ہوا۔

و ج کو د سے ملایا۔ چونکہ أج أد کے متساوی ہے، تو زاویہ أجد أدج کے متساوی ہوا (کیونکہ مثلث أجد متساوئ ساقین ہے)، تو أدج دجب سے بڑا ہوا، تو جدب دجب سے کافی بڑا ہوا۔ پھر چونکہ جب دب کے متساوی ہے، تو زاویہ جدب دجب کے متساوی ہوا۔ لیکن یہ ثابت ہو چکا ہے کہ پہلا زاویہ دوسرے سے کافی بڑا ہے۔ و یہ بات مستحیل ہے۔

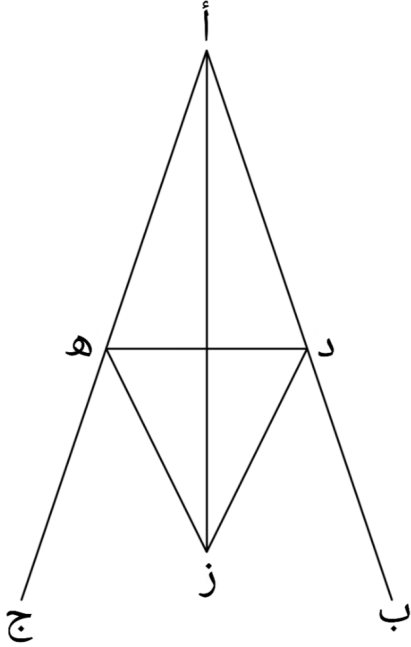
تو ایک خط مستقیم پہ دو معلوم خطوط مستقیم کے متساوی حسب ترتیب ایسی دو خطوط مستقیم نہیں بنائیں جا سکتیں جو ایک ہی جانب میں مختلف نقاط پہ ملیں لیکن ان کی غایات وہی ہوں جو معلوم خطوط مستقیم کی ہیں۔ اسی چیز کو ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۸

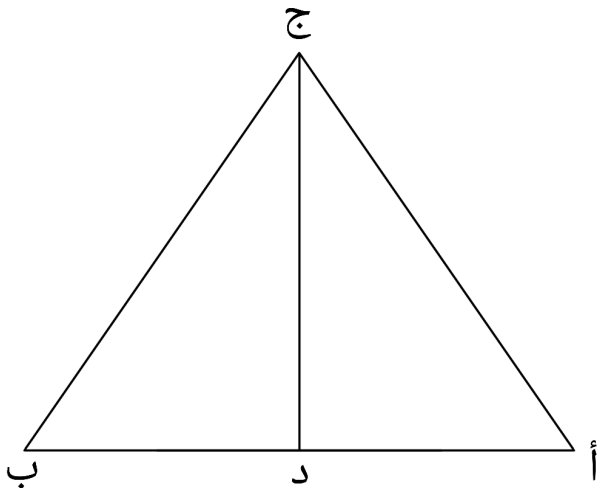
اگر دو مثلثات کے تینوں اضلاع متساوی ہیں یعنی قاعدہ قاعدہ کے و دونوں ساق دونوں ساق کے، تو ان مثلثات کے زوایا جن کو ساقین گھیر ہیں متساوی ہوں گے۔

فرض کرو کہ أبج و دھز دو مثلثات ہیں جن میں سے ایک کے ساقین بأ و أج حسب ترتیب متساوی ہیں دوسرے کے ساقین ھد و دز کے، یعنی أب دھ کے و أج دز کے۔ و فرض کرو کہ قاعدہ بج متساوی ہے قاعدہ ھز کے۔ تو میں کہتا ہوں کہ مثلث بأج مثلث ھدز کے متساوی ہے۔ چونکہ جب مثلث أبج کو

مثلث دھز پہ وضع کیا، و نقطہ ب کو نقطہ ھ پہ واقع کیا، و خط مستقیم بج کو ھز پہ واقع کیا، تو بج و ھز کے متساوی ہونے کی وجہ سے نقطہ ج نقطہ ز پہ منطبق ہوا۔ و چونکہ بج ھز پہ منطبق ہے تو بأ و أج بھی ھد و دز پہ حسب ترتیب منطبق ہوئے۔ کیونکہ اگر قاعدہ بج قاعدہ ھز پہ منطبق ہوا لیکن ساقین بأ و أج ساقین ھد و دز پہ منطبق نہ ہوئے، بلکہ منحرف ہو گئے جیسے ھح و حز، تو ہم نے ایک خط مستقیم پہ دو خطوط مستقیم کے متساوی ان کی نظیر دیگر دو خطوط بنایا جو ایک ہی جانب کے مختلف نقاط پہ ملیں و ان کی غایات یکساں ہیں۔ لیکن ایسی خطوط بنانا مستحیل ہے (جیسا کہ مسئلہ۷ میں گزرا) کہ قاعدہ بج ھز پہ واقع ہو لیکن بأ و أج منطبق نہ ہوں ھد و دز پہ حسب ترتیب۔ لہذا زاویہ بأج زاویہ ھدز پہ منطبق ہوا و اس کے متساوی ہوا۔

لہذا اگر دو مثلثات کے ساقین ان کی نظیر کے متساوی ہیں، و ان کے قاعدات بھی متساوی ہیں، تو ان کے زوایا جن کو ساقین گھیرے ہیں وہ بھی متساوی ہوئے۔ یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۹

زاویۂ متساوئ ساقین کو نصف میں کاٹنا۔

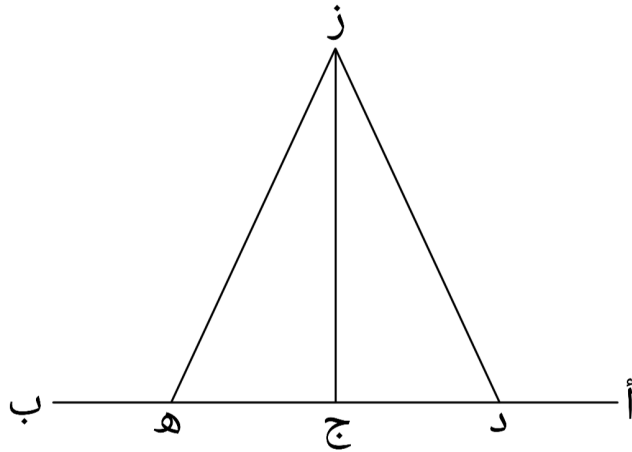
فرض کرو کہ بأج ایک زاویۂ متساوئ ساقین ہے، تو اس کو نصف میں کاٹنا مطلوب ہوا۔ تو خط أب پہ کوئی نقطہ د اخذ کیا، و خط أج سے أد کے متساوی ایک خط أھ کاٹا، پھر د کو ھ سے ملایا، پھر دھ پہ مثلث متساوئ اضلاع دزھ بنایا، پھر أ کو ز سے ملایا۔ میں کہتا ہوں کہ زاویہ بأج کو خط مستقیم أز نے نصف میں کاٹا۔ چونکہ أد متساوی ہے أھ کے، و أز مشترک ہے، تو دو خطوط مستقیم دأ و أز اپنی نظیر دیگر دو خطوط مستقیم ھأ و أز کے متساوی ہوئیں حسب ترتیب۔ و قاعدہ دز متساوی ہے قاعدہ ھز کے۔ لہذا زاویہ دأز متساوی ہوا زاویہ ھأز کے، یعنی زاویۂ مساوئ ساقین بأج کو خط مستقیم أز نے نصف میں کاٹا ہے۔

# مسئلہ ۱۰

متناہی خط مستقیم کو نصف میں کاٹنا۔

فرض کرو کہ أب متناہی خط مستقیم ہے، تو اسے نصف میں کاٹنا مطلوب ہوا۔ تو اس خط پہ ایک مثلث متساوئ اضلاع أبج بنایا، و زاویہ أجب کو خط مستقیم جد سے نصف میں کاٹا۔ میں کہتا ہوں کہ خط مستقیم أب نقطہ د سے نصف میں کٹ گئی۔ چونکہ أج

متساوی ہے جب کے و جد مشترک ہے، تو دو اضلاع أج و جد متساوی ہوئیں دو اضلاع بج و جد کے۔ و زاویہ أجد متساوی ہے بجد کے (بوجہ أبج کا نصف ہونے کے)۔ لہذا قاعدہ أد متساوی ہوا قاعدہ دب کے۔ تو متناہی خط مستقیم أب نقطہ د سے نصف میں کٹ گئی۔ و یہی مطلوب تھا۔

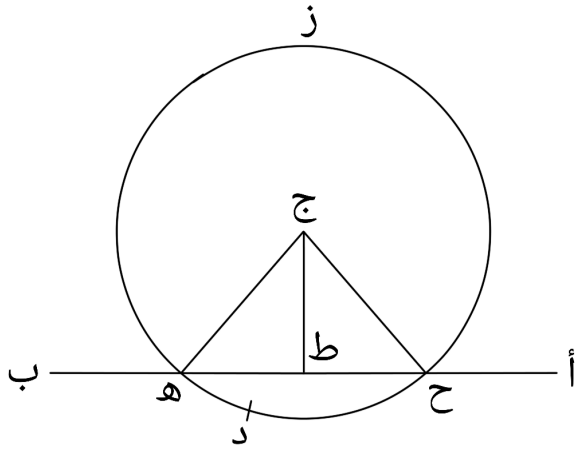
# مسئلہ ١١

معلوم خط مستقیم کے معلوم نقطہ پہ زاویۂ قائمہ سے دوسری خط مستقیم بنانا۔

فرض کرو کہ أب معلوم خط مستقیم ہے، و اس پہ ج معلوم نقطہ ہے۔ تو نقطہ ج پہ خط مستقیم أب کے اعتبار سے زاویۂ قائمہ سے ایک خط مستقیم بنانا مطلوب ہوا۔ تو أج پہ کوئی نقطہ د اخذ کیا، و جد کے متساوی جھ بنایا۔ پھر دھ پہ مثلث متساویٔ اضلاع دھز بنایا، پھر ز و ج کو ملایا۔ میں کہتا ہوں کہ خط مستقیم زج

معلوم خط مستقیم أب کے معلوم نقطہ ج پہ زاویۂ قائمہ سے بنی ہے۔ چونکہ ضلع دج متساوی ہے جھ کے، و جز مشترک ہے۔ تو دج و جز متساوی ہوئے ان کے نظیر ھج و جز کے، و قاعدہ دز متساوی ہوا قاعدہ زھ کے۔ لہذا زاویہ دجز متساوی ہوا زاویہ ھجز کے، و یہ دونوں پڑوسی ہیں۔ لیکن جب ایک خط مستقیم دوسری پہ قائم ہوتی ہے و پڑوسی زوایا کو متساوی بناتی ہے، تو دونوں زوایا میں سے ہر قائمہ ہوتا ہے۔ لہذا دجز و زجھ میں سے ہر ایک قائمہ ہوا۔

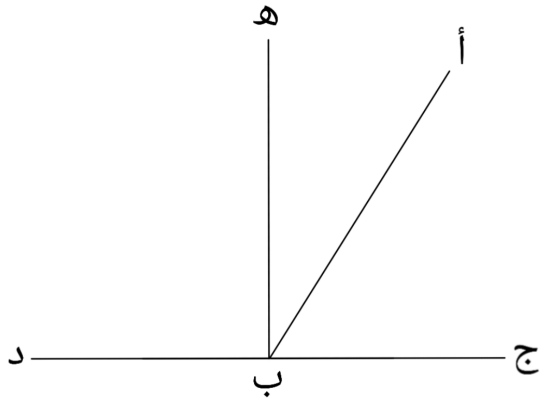
لہذا خط مستقیم أب کے معلوم نقطہ ج پہ قائمہ سے خط مستقیم جز قائم ہوئی۔ و یہی چیز مطلوب تھی۔

# مسئلہ ۱۲

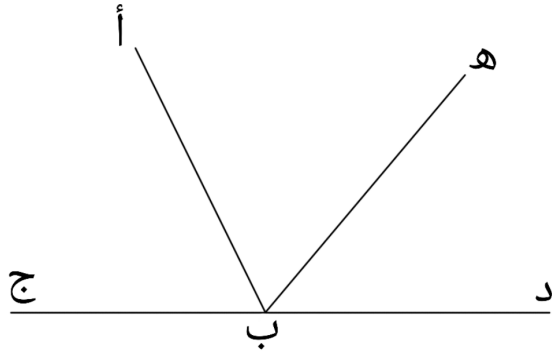
ایک معلوم خط مستقیم غیر متناہی پہ ایک معلوم نقطہ سے، جو اس پہ نہیں ہے، ایک عمود بنانا۔

فرض کرو کہ أب ایک معلوم خط مستقیم غیر متناہی ہے، و ج ایک معلوم نقطہ ہے جو أب پہ نہیں ہے۔ تو غیر متناہی خط مستقیم أب پہ معلوم نقطہ ج سے، جو اس پہ نہیں ہے، عمود بنانا مطلوب ہوا۔ تو خط مستقیم أب کے دوسرے جانب کوئی نقطہ د فرض کیا۔ پھر ج کو مرکز بنا کے اس سے د دوری پہ دائرہ هزح بنایا۔ پھر خط مستقیم هح کو ط سے نصف میں کاٹا، پھر خطوط مستقیم جه و جط و جح بنایا۔ میں کہتا ہوں کہ جط عمود ہے خط مستقیم غیر متناہی أب پہ نقطہ ج سے جو أب پہ نہیں ہے۔ چونکہ حط متساوی ہے طه کے، و جط مشترک ہے، تو دو اضلاع حط و طج متساوی ہے ان کی نظیر هط و طج کے۔ و قاعدہ جح متساوی ہے قاعدہ جه کے۔ لہذا زاویہ حطج متساوی ہوا زاویہ هطج کے، و دونوں پڑوسی ہیں۔ لیکن جب ایک خط مستقیم دوسری پہ قائم ہوتی ہے و پڑوسی زوایا کو متساوی بناتی ہے، تو دونوں میں سے ہر ایک قائمہ ہوتا ہے، و وہ خط مستقیم عمود کہلاتی ہے اس پہ جس پہ وہ قائم ہے۔

لہذا جط عمود ہے معلوم خط مستقیم غیر متناہی أب پہ معلوم نقطہ ج سے جو اس پہ نہیں ہے۔ و یہی مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۱۳

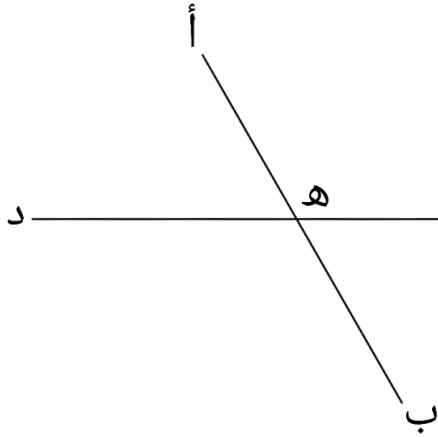
اگر ایک خط مستقیم دوسری خط مستقیم پہ قائم ہو تو وہ دو زوایا بنائے گی جو یا تو دو قائمات ہوں گے یا دو قائمات کے متساوی ہوں گے۔ تو ایک خط مستقیم جد پہ دوسری خط مستقیم أب قائم کیا، تو أب نے دو زوایا جبأ و أبد بنایا۔ میں کہتا ہوں کہ زوایا جبأ و أبد یا تو دو قائمات ہیں، یا ان کے متساوی ہیں۔ و اگر جبأ و أبد ایک دوسرے کے متساوی ہیں تو دونوں میں سے ہر ایک قائمہ ہے۔ و اگر ایسا نہیں ہے، تو خط جد کے نقطہ ب پہ قائمہ سے به بنایا، تو جبه و هبد دو قائمات ہوئے۔ و چونکہ جبه متساوی ہوا جبأ و أبه کے، پھر هبد کو دونوں کے ساتھ جمع کیا، تو جبه و هبد ایک ساتھ متساوی ہوئے جبأ و أبه و هبد کے ایک ساتھ۔ و چونکہ أبد متساوی ہے دبه و هبأ کے ایک ساتھ، پھر أبج کو دونوں کے ساتھ جمع کیا، تو دبأ و أبج ایک ساتھ متساوی ہوئے دبه و هبأ و أبج کے ایک ساتھ۔ لیکن جبه و هبد بھی ایک ساتھ انہیں تینوں کے متساوی ہیں ایک ساتھ۔ و وہ چیزیں جو ایک چیز کے متساوی ہوں تو آپس میں متساوی ہوتی ہیں۔ لہذا جبه و هبد ایک ساتھ متساوی ہوئے جبأ و أبد کے ایک ساتھ۔ لیکن جبه و هبد دو قائمات ہیں، تو أبج و أبد بھی ایک ساتھ دو قائمات کے متساوی ہوئے۔

لہذا اگر ایک خط مستقیم دوسری خط مستقیم پہ قائم ہو تو وہ دو زوایا بنائے گی جو یا تو قائمات ہوں گے یا ان کے متساوی ہوں گے۔ و یہی چیز ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۱۴

اگر کسی خط مستقیم کے کسی نقطہ سے دو خطوط مستقیم مختلف جوانب میں نکلیں، و ان کے زوایا جار (پڑوسی) ایک ساتھ دو قائمات کے متساوی ہوں، تو دونوں خطوط مستقیم دوسرے کے اعتبار سے ایک سیدھ میں ہویں۔

فرض کرو کہ دو خطوط مستقیم بج و بد جو مختلف جوانب میں ہیں، ایک خط مستقیم أب کے کسی نقطہ ب سے زوایا جار أبج و أبد بنائے ہیں، جو ایک ساتھ دو قائمات کے متساوی ہیں۔ میں کہتا ہوں کہ بد بج کی سیدھ میں ہے۔ کیونکہ اگر بد بج کی سیدھ میں نہ ہو، تو فرض کرو کہ بھ بج کی سیدھ میں ہے۔ چونکہ خط مستقیم أب خط مستقیم جبھ پہ عمود ہے، تو زوایا أبج و أبھ ایک ساتھ دو قائمات کے متساوی ہوئے۔ لیکن معلوم ہے کہ أبج و أبد بھی ایک ساتھ دو قائمات کے متساوی ہیں۔ لہذا جبأ و أبھ ایک ساتھ متساوی ہوئے جبأ و أبد کے ایک ساتھ۔ پھر دونوں سے جبأ کو مفرق کیا، تو باقی أبھ متساوی ہوا باقی أبد کے، یعنی چھوٹا بڑے کے۔ و یہ چیز مستحیل ہے۔ لہذا بھ جب کی سیدھ میں نہیں ہے، و ایسے ہی ہم ثابت کر سکتے ہیں کی بد کے سوا کوئی بھی خط اس کی سیدھ میں نہیں ہے۔

لہذا اگر کسی خط مستقیم کے کسی نقطہ سے دو خطوط مستقیم مختلف جوانب میں نکلیں، و ان کے زوایا جار ایک ساتھ دو قائمات کے متساوی ہوں، تو دونوں خطوط مستقیم ایک دوسرے کے اعتبار سے ایک سیدھ میں ہوں گی۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۱۵

اگر دو خطوط مستقیم ایک دوسرے کو کاٹیں تو وہ زوایا متقابل مقلوب بنائیں گی جو ایک دوسرے کے متساوی ہوں گے۔

تو فرض کرو کہ أب و جد دو خطوط مستقیم ہیں جنہوں نے نقطہ ھ پہ ایک دوسرے کو کاٹا ہے۔ میں کہتا ہوں کہ زاویہ أھج متساوی ہے دھب کے، و جھب أھد کے۔ چونکہ خط مستقیم أھ خط مستقیم جد پہ قائم ہوئی و زوایا جھأ و أھد بنایا، تو زوایا جھأ و أھد دو قائمات کے متساوی ہوئے۔ ایسے ہی خط مستقیم دھ خط مستقیم أب پہ قائم ہوئی و أھد و دھب بنایا، تو وہ دو قائمات کے متساوی ہوئے۔ لہذا جھأ و أھد ایک ساتھ متساوی ہوئے أھد و دھب کے۔ پھر أھد کو دونوں میں سے جدا کیا، تو باقی جھب متساوی ہوا باقی بھد کے۔ ایسے ہی یہ بھی دکھایا جا سکتا ہے کہ جھب و دھأ متساوی ہیں۔

لہذا اگر دو خطوط مستقیم ایک دوسرے کو کاٹیں تو وہ زوایا متقابلِ مقلوب بنائیں گی جو ایک دوسرے کے متساوی ہوں گے۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۱۶

اگر کسی مثلث کا ایک ضلع نکالا جائے، تو اس کا زاویۂ خارجی دونوں زوایا داخلی متقابل میں سے ہر ایک سے بڑا ہوگا۔

فرض کرو کہ أبج ایک مثلث ہے، تو اس کے ایک ضلع بج کو د تک نکالا۔ میں کہتا ہوں کہ زاویۂ خارجی أجد زوایا داخلی متقابل جبأ و بأج میں سے ہر ایک سے بڑا ہے۔ تو أج کو نقطہ

ھ سے نصف میں کاٹا، و ب کو ھ میں ملایا، و ز تک زیادہ کیا، و ھز کو بھ کے متساوی رکھا، و ز کو ج میں ملایا، و أج کو ح تک نکالا۔ تو چونکہ أھ ھج کے متساوی ہے و بھ ھز کے، تو أھ و ھب متساوی ہوئے جھ و ھز کے حسب ترتیب۔ و زاویہ أھب زھج کے متساوی ہے بوجہ متقابلِ مقلوب ہونے کے۔ لہذا قاعدہ أب متساوی ہوا قاعدہ زج کے، تو مثلث أبج متساوی ہوا زبج کے، تو باقی زوایا جو اضلاع متساوی سے معلق

ہیں وہ متساوی ہوئے اپنی نظیر باقی معلق زوایا کے۔ لہذا بأھ متساوی ہوا ھجز کے۔ و ھجد ھجز سے بڑا ہے، تو أجد بأھ سے بڑا ہوا۔ ایسے ہی بج کو نصف میں کاٹ کے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ بجح، کہنے کا مطلب ہے أجد، أبج سے بڑا ہے۔

لہذا کسی بھی مثلث میں جب ایک ضلع نکالا جائے، تو زاویۂ خارجی دونوں زوایا داخلی متقابل میں سے ہر ایک سے بڑا ہوگا۔ و یہی ثابت کرنا تھا۔

# مسئلہ ١٧

کسی بھی مثلث میں دو زوایا ایک ساتھ دو قائمات سے چھوٹے ہوتے ہیں۔

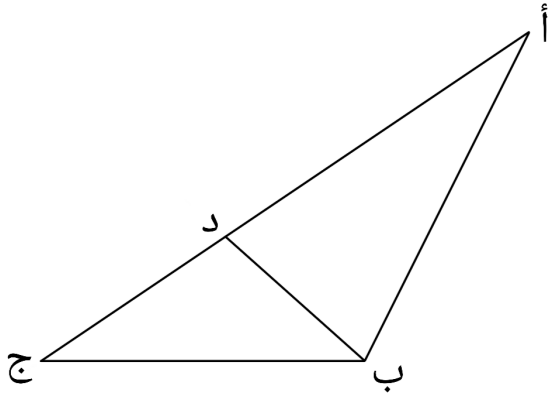
فرض کرو کہ أبج ایک مثلث ہے، تو میں کہتا ہوں کہ أبج کے کوئی بھی دو زوایا ایک ساتھ دو قائمات سے چھوٹے ہیں۔ تو بج کو د تک نکالا، و چونکہ زاویہ أجد مثلث أبج سے خارج ہے، لہذا وہ زاویۂ داخلی متقابل أبج سے بڑا ہوا۔ تو

دونوں میں أجب کو جمع کیا، زوایا أجد و أجب ایک ساتھ بڑے ہوئے أبج و بجأ سے ایک ساتھ۔ لیکن أجد و أجب دو قائمات کے متساوی ہیں، تو أبج و أجب دو قائمات سے چھوٹے ہوئے۔ ایسے ہی ہم دکھا سکتے ہیں کہ بأج و أجب بھی دو قائمات سے چھوٹے ہیں، و ایسے ہی جأب و أبج بھی۔

لہذا کسی بھی مثلث میں دو زوایا ایک ساتھ دو قائمات سے چھوٹے ہوتے ہیں۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

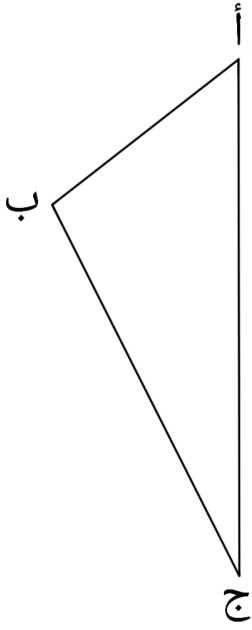
# مسئلہ ۱۸

کسی بھی مثلث میں سب سے بڑا ضلع سب سے بڑے زاویہ کے مقابل میں ہوتا ہے۔

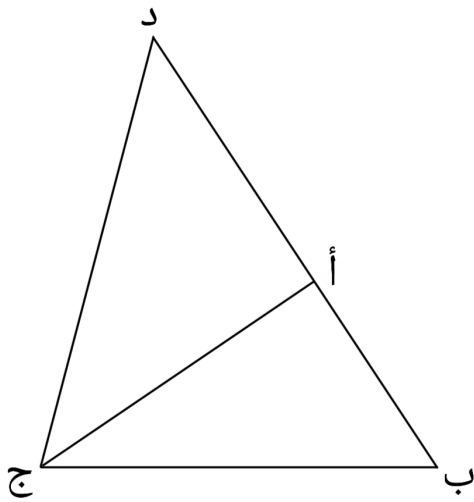
فرض کرو کہ أبج ایک مثلث ہے جس کا ضلع أج أب سے بڑا ہے۔ میں کہتا ہوں کہ أبج بجأ سے بڑا ہے۔ چونکہ أج بڑا ہے أب سے، تو أج سے أب کے متساوی أد کاٹا، و د کو ب سے ملایا۔ و چونکہ زاویہ أدب مثلث بجد سے خارج ہے تو وہ داخلی متقابل بجد سے بڑا ہوا۔ لیکن أدب متساوی ہے أبد کے کیونکہ ضلع أب ضلع أد کے متساوی ہے، تو أبد أجب سے بڑا ہوا۔ لہذا أبج مزید بڑا ہوا أجب سے۔

أ
د
ج
ب

لہذا کسی بھی مثلث میں سب سے بڑا ضلع سب سے بڑے زاویہ کے مقابل ہوگا۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

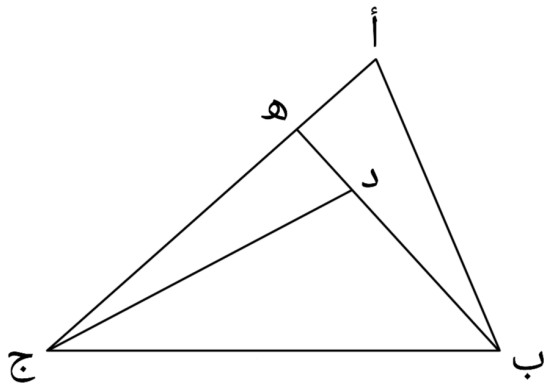
# مسئلہ ۱۹

کسی بھی مثلث میں سب سے بڑا زاویہ سب سے بڑے ضلع کے مقابل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ أبج ایک مثلث ہے جس کا زاویہ أبج بجأ سے بڑا ہے۔ میں کہتا ہوں کہ ضلع أج بھی أب سے بڑا ہے۔ کیونکہ اگر ایسا نہ ہوا تو أج یا تو أب کے متساوی ہوگا یا اس سے چھوٹا۔ لیکن وہ متساوی نہیں ہے کیونکہ تب زاویہ أبج بھی أجب کے متساوی ہوگا، لیکن ایسا ہے نہیں۔ لہذا أج أب کے متساوی نہیں ہے۔ و نہ أج أب سے چھوٹا ہے کیونکہ تب زاویہ أبج بھی أجب سے چھوٹا ہوگا، لیکن ایسا ہے نہیں۔ لہذا أج أب سے چھوٹا نہیں ہے، و ثابت ہو چکا کہ متساوی بھی نہیں ہے۔ لہذا أج بڑا ہے أب سے۔
لہذا کسی بھی مثلث میں سب سے بڑا زاویہ سب سے بڑے ضلع کے مقابل میں ہوگا۔ یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۲۰

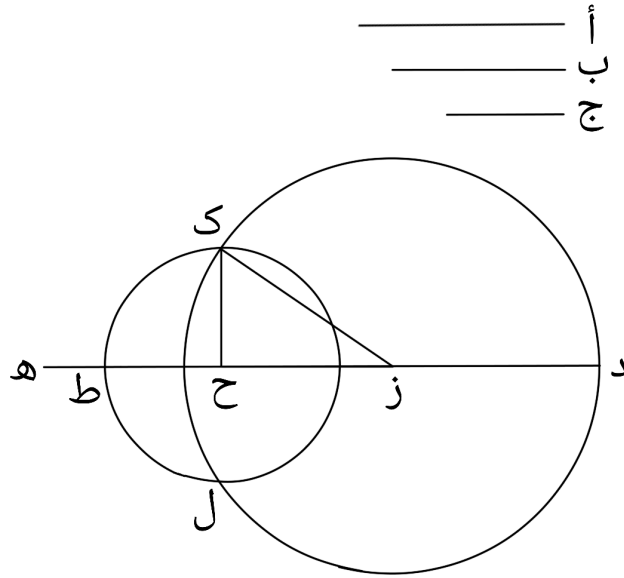
کسی بھی مثلث میں، کوئی بھی دو اضلاع ایک ساتھ باقی ضلع سے بڑے ہوتے ہیں۔
فرض کرو کہ أبج ایک مثلث ہے۔ میں کہتا ہوں کہ مثلث أبج میں کوئی بھی دو اضلاع ایک ساتھ باقی ضلع سے بڑے ہیں۔ تو بأ و أج بڑا ہوا بج سے، و أب و بج بڑا ہوا أج سے، و بج و جأ بڑا ہوا أب سے۔ تو بأ کو نقطہ د تک نکالا، و أد کو جأ کے متساوی بنایا، و دج کو ملایا۔ تو چونکہ دأ متساوی ہے أج کے، تو زاویہ أدج متساوی ہوا أجد کے۔ لہذا بجد بڑا ہوا أدج سے۔ و چونکہ دجب ایک مثلث ہے جس کا زاویہ بجد بڑا ہے بدج سے، و بڑا زاویہ بڑا ضلع بناتا ہے، تو دب بڑا ہوا بج سے۔ لیکن دأ متساوی ہے أج کے۔ لہذا بأ و

أج ایک ساتھ بڑے ہوئے بج سے۔ ایسے ہی ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ أب و بج ایک ساتھ بڑے ہیں جأ سے، و بج و جأ ایک ساتھ بڑے ہیں أب سے۔
لہذا کسی بھی مثلث میں، کوئی بھی دو اضلاع ایک ساتھ باقی ضلع سے بڑے ہوتے ہیں۔ اسے ہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۲۱

اگر کسی مثلث کے اندر اس کے ایک ضلع کے کناروں سے دو خطوط نکالی جائیں جو کسی نقطہ پہ ملیں، تو وہ دونوں ایک ساتھ چھوٹی ہوں گی باقی دو اضلاع سے ایک ساتھ، لیکن ان سے بنا ہوا زاویہ بڑا ہوگا باقی دو اضلاع کے زاویہ سے۔

تو مثلث أبج کے اندر اس کے ایک ضلع بج کے کناروں سے خطوط مستقیم بد و جد بنایا۔ میں کہتا ہوں کہ بد و دج چھوٹی ہیں باقی دو اضلاع بأ و أج سے۔ تو خط بد کو ھ تک نکالا۔ و چونکہ کسی بھی مثلث میں دو اضلاع ایک ساتھ باقی ضلع سے بڑے ہوتے ہیں، تو مثلث أبھ میں أب و أھ ایک ساتھ بڑے ہوئے بھ سے۔ پھر دونوں میں ھج جمع کیا تو بأ و أج ایک ساتھ بڑے ہوئے بھ و ھج سے۔ پھر چونکہ مثلث جھد میں دو اضلاع جھ و ھد ایک ساتھ بڑے ہیں جد سے۔ پھر دونوں میں دب جمع کیا تو جھ و ھب ایک ساتھ بڑے ہوئے جد و دب سے ایک ساتھ۔ لیکن بأ و أج ایک ساتھ بڑے ہیں بھ و ھج سے ایک ساتھ۔ لہذا بأ و أج ایک ساتھ مزید بڑے ہیں بد و دھ سے۔ تو جونکہ کسی بھی مثلث میں زاویۂ خارجی زاویۂ داخلی متقابل سے بڑا ہوتا۔ لہذا مثلث جھد کا زاویۂ خارجی بدج بڑا ہوا زاویہ جھد سے۔ و ایسے ہی مثلث أبج کا زاویۂ خارجی جھب بڑا ہوا بأج سے۔ لیکن بدج بڑا ہے جھب سے، تو بدج مزید بڑا ہوا بأج سے۔

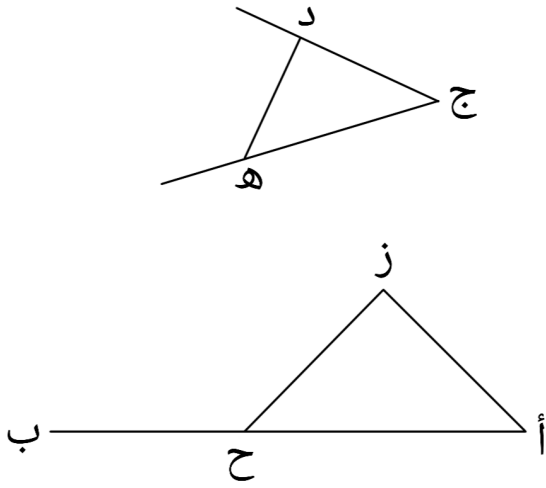
لہذا اگر مثلث کے اندر اس کے ایک ضلع کے کناروں سے دو خطوط مستقیم بنائی جائیں، تو وہ مثلث کے باقی دو بضلاع سے چھوٹی ہوں گی، لیکن بڑا زاویہ گھیریں گی۔ و یہی ثابت کرنا تھا۔

# مسئلہ ۲۲

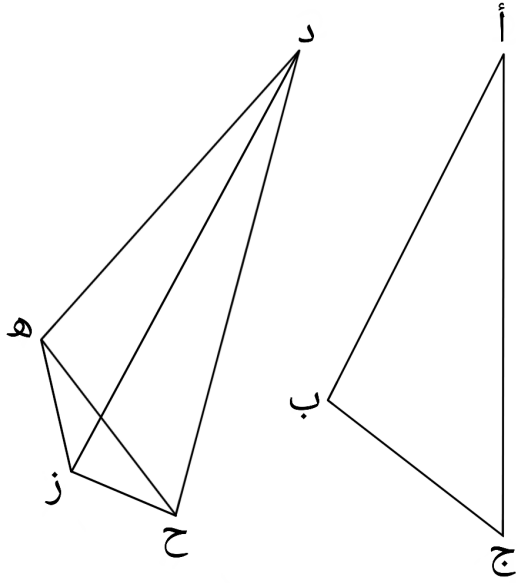
تین معلوم خطوط مستقیم کے متساوی تین خطوط مستقیم سے مثلث بنانا، جن میں سے دو ایک ساتھ باقی سے بڑی ہوں۔

فرض کرو کہ أ، ب، ج تین معلوم خطوط مستقیم ہیں جن میں سے دو ایک ساتھ باقی سے بڑی ہیں؛ یعنی أ و ب ج سے، و أ و ج ب سے، و ب و ج أ سے۔ تو خطوط أ، ب، ج کے متساوی خطوط سے مثلث بنانا مطلوب ہوا۔ تو ایک خط مستقیم دھ بنایا، جو د پہ ختم ہے و ھ کے جانب غیر متناہی ہے۔ پھر اس میں سے أ کے متساوی دز کاٹا، و ب کے متساوی زح کاٹا، و ج کے متساوی حط کاٹا۔ پھر مرکز ز سے د دوری پہ دائرہ دکل بنایا، و مرکز ح سے ط دوری پہ دائرہ کلط بنایا۔ پھر ک کو ز و ح سے ملایا۔ میں کہتا ہوں کہ مثلث کزح خطوط أ، ب، ج کے متساوی تین خطوط سے بنا ہے۔ چونکہ نقطہ ز دائرہ دکل کا مرکز ہے، تو زد و زک متساوی ہوئے۔ لیکن زد متساوی ہے أ کے، تو زک بھی متساوی ہوا أ کے۔ و چونکہ نقطہ ح دائرہ لکط کا مرکز ہے تو حط متساوی ہوا حک کے۔ لیکن حط متساوی ہے ج کے، تو کط متساوی ہوا ج کے۔ و زح متساوی ہے ب کے۔ لہذا تین خطوط مستقیم کز، زح، حک متساوی ہوئیں أ، ب، ج کے۔

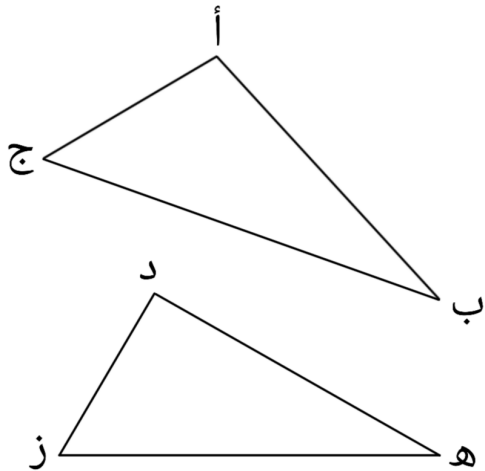
لہذا مثلث کزح بنا ہے تین خطوط مستقیم کز، زح، حک سے جو تین معلوم خطوط مستقیم أ، ب، ج کے متساوی ہیں۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۲۳

معلوم خط مستقیم کے ایک نقطہ پہ معلوم زاویۂ مستقیم اضلاع کے متساوی زاویۂ مستقیم اضلاع بنانا۔

فرض کرو کہ أب معلوم خط مستقیم ہے، و أ اس پہ نقطہ ہے، و دھج اضلاع مستقیم والا معلوم زاویہ ہے۔ تو خط أب کے نقطہ أ پہ دھج کے متساوی زاویۂ مستقیم اضلاع بنانا مطلوب ہوا۔
تو خط جد پہ کوئی نقطہ د اخذ کیا و جھ پہ کوئی نقطہ ھ، و د کو ھ میں ملایا۔ و جد و دھ و جھ کے متساوی تین خطوط مستقیم سے مثلث أزح بنایا، جس میں أز متساوی ہے جد کے، و أح جھ کے، و زح دھ کے۔ چونکہ دج و جھ متساوی ہیں زأ و أح کے حسب ترتیب، و قاعدہ دھ متساوی زح کے، تو زاویہ دھج متساوی ہوا زاویہ زأح کے۔
لہذا زاویۂ مستقیم اضلاع زأح متساوی ہوا معلوم زاویۂ مستقیم اضلاع دجھ کے، جو بنا ہے معلوم خط مستقیم أب کے نقطہ أ پہ۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۲٤

اگر دو مثلثات میں سے ایک کے دو اضلاع دوسرے کے دو اضلاع کے متساوی ہیں حسب ترتیب، لیکن اضلاع متساوی سے گھرے ہوئے زاویا میں سے ایک دوسرے سے بڑا ہے، تو پہلے کا قاعدہ بھی دوسرے کے قاعدہ سے بڑا ہوگا۔
تو فرض کرو کہ أبج و دھز دو مثلثات ہیں، جن کے دو اضلاع أب و أج متساوی ہیں دو اضلاع دھ و دز کے حسب ترتیب، یعنی أب دھ کے و أج دز کے۔ و نقطہ أ کا زاویہ د کے زاویہ

سے بڑا ہے۔ میں کہتا ہوں کہ قاعدہ بج بڑا ہے قاعدہ ھز سے۔ چونکہ بأج بڑا ہے ھدز سے، تو دھ کے نقطہ د پہ زاویہ بأج کے متساوی ھدح بنایا۔ و دح کو أج یا دز کے متساوی بنایا، و ھ و ز کو ح میں ملایا۔ چونکہ أب متساوی ہے دھ کے و أج دح کے، تو بأ و أج ایک ساتھ متساوی ہوئے ھد و دح کے حسب ترتیب۔ و زاویہ بأج متساوی ہے ھدح کے۔ لہذا قاعدہ بج متساوی ہوا قاعدہ ھز کے۔ پھر چونکہ دز متساوی ہے دح کے، تو زاویہ دحز متساوی ہوا دزح کے۔ لہذا دزح بڑا ہوا ھحز سے۔ لہذا ھزح مزید بڑا ہوا ھحز سے۔ و چونکہ مثلث ھزح کا زاویہ ھزح بڑا ہے زاویہ ھحز سے، و بڑے زاویہ کے مقابل کا ضلع بھی بڑا ہوتا ہے، تو ضلع ھح بڑا ہوا ھز سے۔ لیکن ھح متساوی ہے بج کے، تو بج بھی بڑا ہوا ھز سے۔

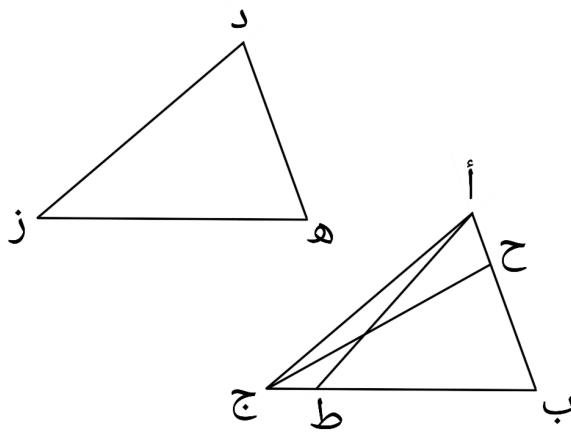
# مسئلہ ۲۵

اگر دو مثلثات میں دو اضلاع دو اضلاع کے متساوی ہیں حسب ترتیب، لیکن قاعدہ قاعدہ سے بڑا ہے، تو زوایا جو اضلاع متساوی سے گھرے ہیں بڑے چھوٹے ہوں گے۔

فرض کرو کہ أبج و دھز دو مثلثات ہیں، جن کے دو اضلاع أب و أج متساوی ہیں دھ و دز کے حسب ترتیب، یعنی أب دھ کے و أج دز کے۔ و قاعدہ بج قاعدہ ھز سے بڑا ہے۔ میں کہتا ہوں زاویہ بأج بھی

هدز سے بڑا ہے۔ چونکہ اگر ایسا نہ ہوا، تو وہ متساوی یا چھوٹا ہوگا۔ لیکن بأج هدز کے متساوی نہیں ہے۔ کیونکہ تب تو قاعدہ بج بھی قاعدہ هز کے متساوی ہوا، لیکن ایسا ہے نہیں۔ لہذا زاویہ بأج هدز کے متساوی نہیں ہے۔ و نا ہی بأج هدز سے چھوٹا ہے۔ کیونکہ تب تو قاعدہ بج بھی چھوٹا ہوا قاعدہ هز سے، لیکن ایسا ہے نہیں۔ لہذا زاویہ بأج هدز سے چھوٹا نہیں ہے۔ لیکن ثابت ہو چکا ہے کہ وہ متساوی بھی نہیں ہے۔ تو بأج بڑا ہے هدز سے۔

لہذا اگر دو مثلثات کے دو اضلاع دیگر دو اضلاع کے متساوی ہیں حسب ترتیب، لیکن ایک کا قاعدہ دوسرے کے قاعدہ سے بڑا ہے، تو پہلے کے اضلاع متساوی سے گھرا ہوا زاویہ دوسرے والے سے بڑا ہوگا۔ یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۲۶

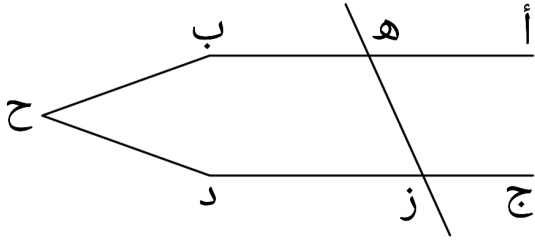
اگر دو مثلثات میں دو زوایا کے متساوی دو زوایا ہیں حسب ترتیب، و ایک ضلع متساوی ہے ایک ضلع کے خواہ وہ زوایا متساوی کے درمیان ہو یا ان میں سے کسی زاویہ کے مقابل، تو باقی اضلاع باقی اضلاع کے متساوی ہوں گے و باقی زوایا باقی زوایا کے۔

فرض کرو کہ أبج و دهز دو مثلثات ہیں جن کے دو زوایا أبج و جبأ متساوی ہیں دو زوایا دهز و هزد کے حسب ترتیب، یعنی أبج متساوی ہے دهز کے و بجأ هزد کے۔ و فرض کرو کہ ایک ضلع ایک ضلع کے متساوی ہے؛ اولا، وہ جو زوایا متساوی کے درمیان ہیں، یعنی بج و هز۔ میں کہتا ہوں کہ باقی اضلاع اپنی نظیر باقی اضلاع کے متساوی ہیں، یعنی أب دھ کے، و أج دز کے، و باقی زوایا باقی زوایا کے، یعنی بأج هدز کے۔ چونکہ اگر أب متساوی نہیں ہے دھ کے، تو ان دونوں میں سے کوئی ایک بڑا ہے۔ تو أب کو بڑا فرض کیا و اس میں سے دھ کے متساوی بح کو کاٹا،

و ح کو ج میں ملایا۔ چونکہ بح متساوی ہے دھ کے، و بج ھز کے۔ تو اضلاع حب و بج متساوی ہوئے دو اضلاع دھ و ھز کے۔ لہذا قاعدہ حج متساوی ہوا دز کے، تو مثلث حبج متساوی ہوا دھز کے، و باقی زوایا جو مقابل ہیں اضلاع متساوی کے وہ باقی زوایا کے متساوی ہوئے۔ لہذا حجب متساوی ہوا دزھ کے، لیکن دزھ کو بجأ کے متساوی تسلیم کیا ہے۔ لہذا بجح متساوی ہوا بجأ کے، یعنی چھوٹا بڑے کے، جو مستحیل ہے۔ لہذ أب غیر متساوی نہیں ہے دھ کے، یعنی متساوی ہے۔ و بج متساوی ہے ھز کے، تو أب و بج متساوی ہوئے دھ و ھز کے حسب ترتیب۔ و زاویہ أبج متساوی ہوا زاویہ دھز کے۔ لہذا قاعدہ أج متساوی ہوا قاعدہ دز کے، و باقی زاویہ بأج متساوی ہوا باقی زاویہ ھدز کے۔

ثانیا، وہ اضلاع جو زوایا متساوی کے مقابل ہیں، مثلا أب دھ کے۔ میں کہتا ہوں کہ باقی اضلاع باقی اضلاع کے متساوی ہیں، یعنی أج دز کے و بج ھز کے، و باقی زاویہ بأج متساوی ہے باقی زاویہ ھدز کے۔ چونکہ اگر بج متساوی نہیں ہے ھز کے، تو ان میں سے ایک بڑا ہے۔ تو بج کو بڑا فرض کیا پھر اس میں ھز کے متساوی بط کاٹا، و ط کو أ میں ملایا۔ و چونکہ بط متساوی ہے ھز کے و أب دھ کے، تو أب و بط متساوی ہوئے دھ و ھز کے حسب ترتیب۔ و جو زوایا وہ گھیرے ہیں وہ بھی متساوی ہوئے۔ لہذا قاعدہ أط متساوی ہوا قاعدہ دز کے، تو مثلث أبط متساوی ہوا مثلث دھز کے، و باقی زوایا جو اضلاع متساوی کے مقابل ہیں متساوی ہوئے باقی زوایا کے۔ لہذا زاویہ بطأ متساوی ہے ھزد کے۔ لیکن ھزد متساوی ہے بجأ کے۔ تو مثلث أطج میں زاویۂ خارجی بطأ متساوی ہوا زاویۂ داخلی متقابل بجأ کے، جو مستحیل ہے۔ لہذا بج غیر متساوی نہیں ہے ھز کے، تو متساوی ہے۔ و أب متساوی ہے دھ کے، تو أب و بج متساوی ہوئے دھ و ھز کے حسب ترتیب، و یہ دونوں گھیرے ہیں زوایا متساوی۔ لہذا قاعدہ أج متساوی ہوا قاعدہ دز کے، و مثلث أبج متساوی ہوا دھز کے، و باقی زاویہ بأج متساوی ہوا باقی زاویہ ھدز کے۔

لہذا اگر دو مثلثات میں دو زوایا دو زوایا کے متساوی ہوں حسب ترتیب، و کوئی ایک ضلع ایک ضلع کے متساوی ہو خواہ دو زوایا متساوی کے درمیان ہو یا کسی ایک کے مقابل۔ تو اس کے باقی اضلاع بھی باقی کے متساوی ہوئے ، و باقی زاویہ باقی کے۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

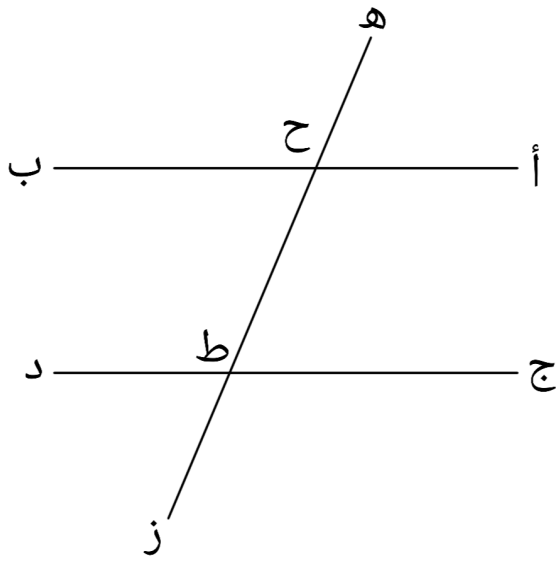
# مسئلہ ۲۷

اگر دو خطوط مستقیم پہ ایک خط مستقیم واقع ہو، و دو زوایا متساوئ متبادل بنائے، تو وہ خطوط متوازی ہوں گی۔

فرض کرو کہ خط مستقیم ھز دو خطوط مستقیم أب و جد پہ واقع ہے، و زوایا متبادل متساوی ہیں۔ میں کہتا ہوں کہ أب جد کے متوازی ہے۔ کیونکہ اگر ایسا نہیں ہے، تو اگر أب و جد کو نکالا جائے، تو لازما آپس میں ملیں گی، یا تو ب و د کے جانب، یا أ و ج کے جانب۔ تو انہیں ب و د کے جانب میں نکالا و نقطہ ح پہ ملایا۔ تو مثلث حھز کا زاویۂ خارجی أھز متساوی ہوا داخلی متقابل ھزد کے۔ و یہ مستحیل ہے۔ لہذا أب و جد کو نکالنے پہ وہ ب و د کے جانب میں نہ ملیں گی۔ و ایسے ہی دکھایا جا سکتا ہے کہ وہ أ و ج کے جانب میں بھی نہ ملیں گی۔ لیکن جو دونوں ہی جوانب میں نہ ملیں، تو وہ متوازی ہیں۔ لہذا أب و جد متوازی ہیں۔

لہذا اگر ایک خط مستقیم دو خطوط مستقیم پہ واقع ہو و دونوں زوایا متبادل کو متساوی بنائے، تو وہ خطوط مستقیم متوازی ہوں گی۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

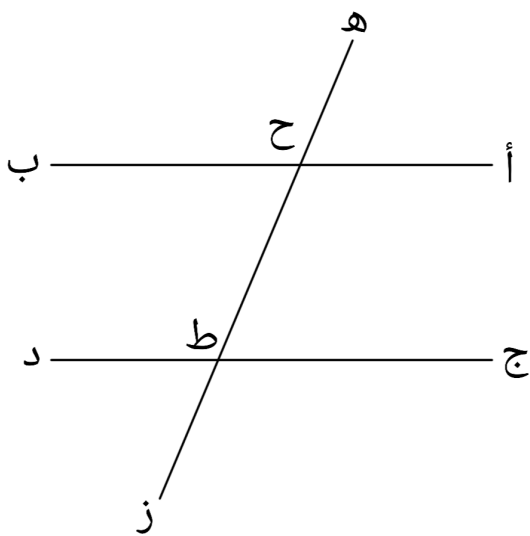
# مسئلہ ۲۸

اگر دو خطوط مستقیم پہ ایک خط مستقیم واقع ہو، و ایک ہی جانب کے زاویۂ خارجی کو زاویۂ داخلی متقابل کے متساوی بنائے، یا ایک ہی جانب کے دونوں زوایا داخلی کو دو قائمات کے متساوی بنائے، تو وہ خطوط متوازی ہوں گی۔

فرض کرو کہ ھز دو خطوط مستقیم أب و جد پہ واقع ہے، تو اس نے زاویۂ خارجی ھحب کو داخلی متقابل حطد کے متساوی بنایا ہے، یا ایک ہی جانب کے زوایا داخلی بحط و حطد کو

دو قائمات کے متساوی بنایا ہے۔ میں کہتا ہوں کہ أب متوازی ہے جد کے۔ چونکہ ھحب متساوی ہے حطد کے، لیکن ھحب متساوی ہے أحط کے۔ و یہ دونوں زوایا متبادل ہیں۔ لہذا أب جد کے متوازی ہے۔

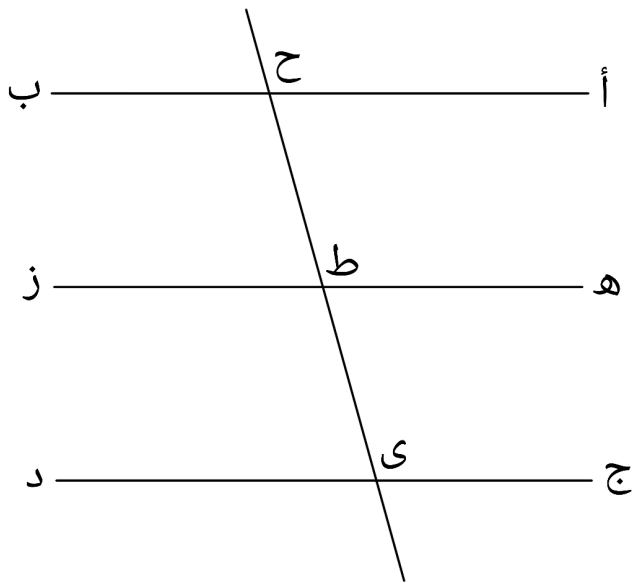
پھر چونکہ بحط و حطد متساوی ہیں دو قائمات کے، و أحط و بحط بھی دو قائمات کے متساوی ہیں، تو أحط و بحط متساوی ہوئے بحط و حطد کے۔ پھر بحط کو دونوں سے جدا کیا، تو باقی أحط متساوی ہوا باقی حطد کے جو زوایا متبادل ہیں۔ لہذا أب متوازی ہے جد کے۔

لہذا اگر دو خطوط مستقیم پہ ایک خط مستقیم واقع ہو، و ایک ہی جانب کے زاویۂ خارجی کو زاویۂ داخلی متقابل کے متساوی بنائے، یا ایک ہی جانب کے دونوں زوایا داخلی کو دو قائمات کے متساوی بنائے، تو دونوں خطوط متوازی ہوں گی۔ یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۲۹

دو خطوط مستقیم متوازی پہ ایک خط مستقیم واقع ہوئی، تو زوایا متبادل متساوی ہوئے، و زاویۂ خارجی زاویۂ داخلی متقابل کے متساوی ہوا، و ایک جانب کے زوایا داخلی دو قائمات کے متساوی ہوئے۔

فرض کرو کہ خط مستقیم ھز دو خطوط متوازی أب و جد پہ واقع ہے۔ میں کہتا ہوں کہ زوایا متبادل أحط و حطد متساوی ہیں و

زاویۂ خارجی ھحب داخلی متقابل حطد کے متساوی ہے و ایک جانب کے زوایا داخلی بحط و حطد دو قائمات کے متساوی ہیں۔ چونکہ اگر أحط متساوی نہیں ہے حطد کے، تو ان میں سے ایک بڑا ہے۔ فرض کرو کہ أحط بڑا ہے۔ تو بحط کو دونوں میں جمع کیا۔ لہذا أحط و بحط بڑے ہوئے بحط و حطد سے۔ لیکن أحط و بحط ایک ساتھ متساوی ہیں دو قائمات کے۔ لہذا بحط و حطد چھوٹے ہوئے دو قائمات سے۔ لیکن ہر خطوط مستقیم جن کو دو قائمات سے چھوٹے زوایا سے غیر نہایہ تک نکالا جائے، تو وہ آپس میں ملتی ہیں۔ لہذا أب و جد آپس میں ملیں گی۔ لیکن وہ دونوں نہیں مل سکتیں کیونکہ ہم نے انہیں متوازی تسلیم کیا ہے۔ لہذا أحط غیر متساوی نہیں ہے حطد کے۔ تو متساوی ہے۔ و ھحب بھی متساوی ہے حطد کے۔ و بحط کو دونوں میں جمع کرو۔ لہذا ھحب و بحط متساوی ہوا بحط و حطد کے۔ لیکن ھحب و بحط متساوی ہیں دو قائمات کے۔ لہذا بحط و حطد دو قائمات کے متساوی ہوئے۔
لہذا خط مستقیم جو دو خطوط متوازی پہ واقع ہوئی و زوایا متبادل متساوی بنایا، تو زاویۂ خارجی زاویۂ داخلی متقابل کے متساوی ہوگا، و ایک جانب کے زوایا داخلی دو قائمات کے متساوی ہوں گے۔ و یہی ثابت کرنا تھا۔

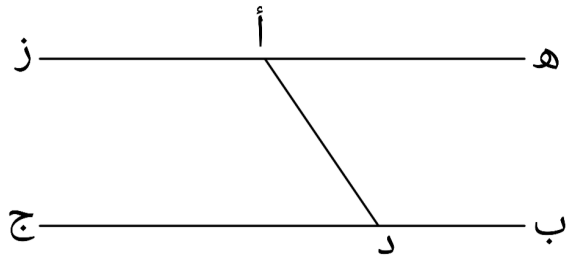
# مسئلہ ۳۰

ایک خط مستقیم کے متوازی خطوط مستقیم آپس میں متوازی ہوں گی۔

فرض کرو کہ أب و جد میں سے ہر ایک ھز کے متوازی ہے۔ میں کہتا ہوں کہ أب متوازی ہے جد کے۔تو ان پہ خط حی واقع کیا۔ و چونکہ خط مستقیم حی واقع ہے خطوط مستقیم متوازی أب و ھز پہ، تو زاویہ أحی متساوی ہوا حطز کے۔ و چونکہ حی واقع ہے

هز و جد پہ، تو حطز متساوی ہوا حیٔد کے۔ لیکن یہ ثابت ہو چکا ہے کہ أحی حطز کے متساوی ہے۔ لہذا أحی متساوی ہوا حیٔد کے، و یہ دونوں زوایا متبادل ہیں۔ لہذا أب متساوی ہوا جد کے۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۳۱

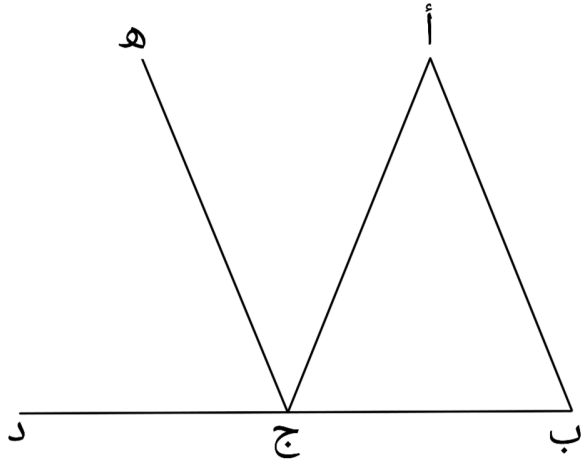
ایک معلوم خط مستقیم کے متوازی ایک معلوم نقطہ سے ایک خط مستقیم بنانا۔

فرض کرو کہ معلوم نقطہ أ ہے، و معلوم خط مستقیم بج ہے، تو أ سے بج کے متوازی خط مستقیم بنانا ہمارا مطلوب ہوا۔

تو بج پہ کوئی نقطہ د منتخب کیا، و أ کو د سے ملایا۔ و خط مستقیم دأ پہ نقطہ أ سے أدج کے متساوی زاویہ دأھ بنایا۔ و خط مستقیم ھأ سے خط مستقیم أز نکالا۔ چونکہ خط مستقیم دأ دو خطوط مستقیم بج و ھز پہ واقع ہے، و زوایا متساوئ متبادل ھأد و أدج بنایا ہے، تو خط ھأز متوازی ہوئی بج کے۔

لہذا معلوم خط مستقیم بج کے متوازی خط مستقیم ھأز بن گئی۔ و یہی مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۳۲

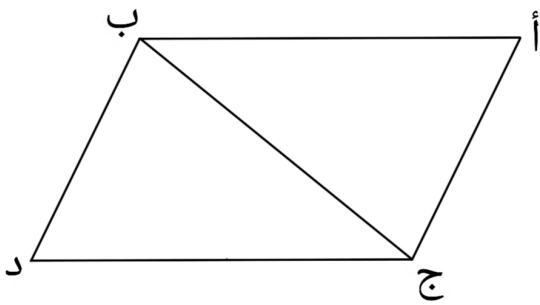
اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کو نکالا، تو اس کا زاویۂ خارجی متساوی ہوا دونوں زوایا داخلی متقابل کے ایک ساتھ، و تینوں زوایا داخلی ایک ساتھ متساوی ہوئے دو قائمات کے۔

فرض کرو کہ أبج ایک مثلث ہے، و اس کا ایک ضلع بج د تک نکالا گیا ہے۔ میں کہتا ہوں کہ زاویۂ خارجی أجد متساوی ہے دو زوایا داخلی متقابل جأب و أبج کے ایک ساتھ، و تینوں زوایا أبج و بجأ و جأب ایک ساتھ دو قائمات کے متساوی ہیں۔ تو خط مستقیم أب کے

متوازی خط جھ نقطہ ج سے بنایا۔ تو چونکہ أب متوازی ہے جھ کے، و أج ان پہ واقع ہے، تو زوایا متبادل بأج و أجھ آپس میں متساوی ہوئے۔ پھر أب متوازی ہے جھ کے، و خط مستقیم بد ان پہ واقع ہے، تو زاویۂ خارجی ھجد زاویۂ داخلی متقابل أبج کے متساوی ہوا۔ لیکن ثابت ہو چکا ہے کہ أجھ متساوی ہے بأج کے۔ لہذا کل أجد متساوی

ہوا دو زوایا داخلی متقابل بأج و أبج کے۔ تو دونوں میں أجب جمع کیا، تو أجد و أجب ایک ساتھ متساوی ہوئے أبج و بجأ و جأب کے ایک ساتھ۔ لیکن أجد و أجب ایک ساتھ دو قائمات کے متساوی ہیں۔ لہذا أبج و بجأ و جأب بھی ایک ساتھ متساوی ہوئے دو قائمات کے۔

لہذا اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کو نکالا، تو اس کا زاویۂ خارجی متساوی ہوگا دونوں زوایا داخلی متقابل کے ایک ساتھ، و تینوں زوایا داخلی متقابل ایک ساتھ متساوی ہوں گے دو قائمات کے۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

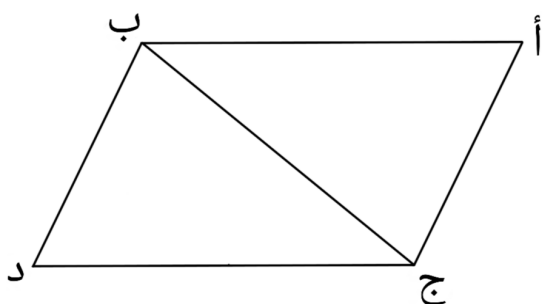
# مسئلہ ۳۳

خطوط مستقیم جو خطوط مستقیم متساوۂ متوازی کے ایک ہی جانب کی غایات میں ملیں ہوں، تو وہ متساوی و متوازی ہوں گی۔

فرض کرو کہ أب و جد متساوی و متوازی ہیں، و خطوط مستقیم أج و بد ان کے ایک ہی جانب کی غایات میں ملیں ہیں۔ میں کہتا ہوں کہ أج و بد بھی متساوی و متوازی ہوں گی۔ تو ب کو ج میں ملایا۔ و چونکہ أب و جد متساوی ہیں، و بج ان پہ واقع ہے، تو زوایا

متبادل أبج و بجد متساوی ہوئے۔ و چونکہ أب و جد متساوی ہیں، و بج مشترک ہے، تو أب و بج متساوی ہوئے دج و جب کے حسب ترتیب، و زاویہ أبج بجد کے متساوی ہے۔ لہذا أج متساوی ہوئی بد کے، و مثلث أبج مثلث بجد کے، و باقی زوایا ان ہی کے مطابق باقی زوایا کے جو اضلاع متساوی کے مقابل ہیں۔ لہذا زاویہ أجب متساوی ہوا زاویہ جبد کے۔ پھر خط مستقیم بج واقع ہے دو خطوط أج و بد پہ، و زوایا متبادل أجب و جبد بنایا ہے، تو أج متوازی ہوئی بد کے۔ و وہ متساوی ثابت کی جا چکی ہیں۔

لہذا خطوط مستقیم جو متساوی و متوازی خطوط سے ایک ہی جانب میں ملیں ہوں، تو وہ بھی متساوی و متوازی ہوں گی۔ یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۳۴

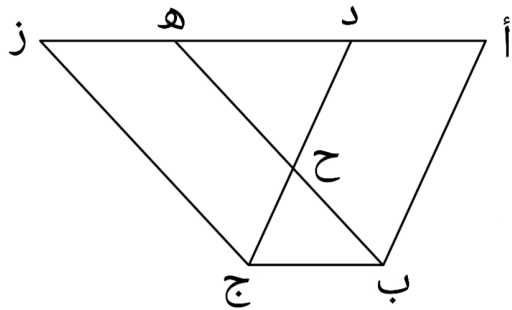
اشکال متزاوئ اضلاع میں اضلاع متقابل و زوایا متقابل یکساں ہوتے ہیں۔ و قطر اسے نصف میں کاٹتا ہے۔

تو فرض کرو کہ أبجد ایک شکل متوازئ اضلاع ہے، و بج اس میں قطر ہے۔ میں کہتا ہوں کہ متوازئ اضلاع أبجد میں اضلاع و زوایا متقابل متساوی ہیں، و قطر بج نے اسے نصف میں کاٹا ہے۔ چونکہ أب متوازی ہے جد کے، و خط مستقیم بج ان پہ واقع ہے، تو زوایا متبادل أبج و بجد متساوی ہوئے۔ پھر چونکہ أج متساوی ہے بد کے، و بج ان پہ واقع ہے، تو زوایا متبادل أجب و جبد بھی آپس میں متساوی ہوئے۔ تو أبج و بجد دو مثلثات ہوئے جن کے دو زوایا أبج و بجأ متساوی ہوئے دو زوایا بجد و جبد کے، حسب ترتیب۔ و ایک ضلع ایک کے جو زوایا متساوی کے درمیان ہے یعنی بج۔

لہذا ان کے باقی اضلاع اپنی نظیر باقی اضلاع کے متساوی ہوئے، و باقی زوایا اپنے نظیر باقی زوایا کے۔ لہذا اضلاع أب جد کے متساوی ہوا و أج بد کے۔ مزید یہ کہ بأج متساوی ہوا جدب

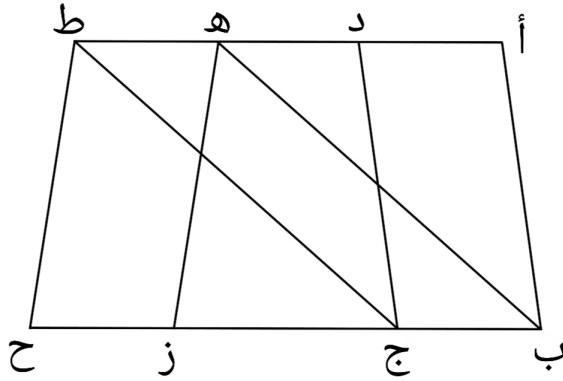
کے۔ و چونکہ زاویہ أبج متساوی ہے بجد کے، و جبد أجب کے، تو کل زاویہ أبد متساوی ہوا کل أجد کے۔ و ثابت ہو چکا ہے کہ بأج متساوی ہے جدب کے۔ لہذا اشکال متوازئ اضلاع میں اضلاع متقابل و زوایا متقابل متساوی ہوئے۔ و میں یہ بھی کہتا ہوں کہ قطر نے اسے نصف میں کاٹا ہے۔ چونکہ أب متساوی ہے جد کے، و بج مشترک ہے، تو أب و بج متساوی ہوئے دج و جب کے حسب ترتیب۔ و زاویہ أبج متساوی ہوا بجد کے۔ لہذا قاعدہ أج متساوی ہوا دب کے، و مثلث أبج متساوی ہوا بجد کے۔

لہذا قطر بج نے متوازئ اضلاع أبجد کو نصف میں کاٹا۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

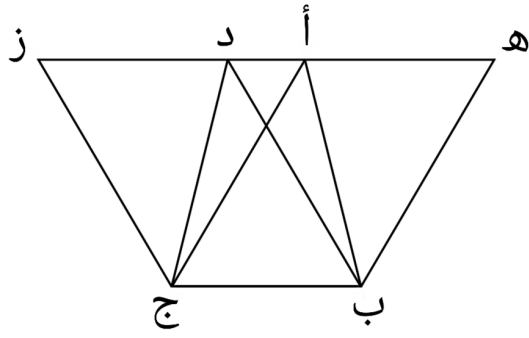
# مسئلہ ۳۵

اشکال متوازئ اضلاع جو ایک ہی قاعدہ پہ ایک ہی خطوط متوازی کے درمیان بنیں ہوں، تو وہ آپس میں متساوی ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ أبجد و ھبجز دو متوازئ اضلاع ہیں، جو ایک قاعدہ بج پہ ایک ہی خطوط متوازی أز و بج کے درمیان ہیں۔ میں کہتا ہوں کہ أبجد متساوی ہے متوازئ اضلاع ھبجز کے۔ چونکہ أبجد متوازئ اضلاع ہے، تو أد متساوی ہوا بج کے۔ و ایسے ہی ھز متساوی ہوا بج کے۔ تو أد متساوی ہوا ھز کے، و دھ مشترک ہے، تو کل أھ متساوی ہوا کل دز کے۔ و أب دج کے متساوی ہے، تو ھأ و أب ایک ساتھ متساوی ہوئے زد و دج کے ایک ساتھ حسب ترتیب۔ و زاویہ زدج متساوی ہوا ھأب کے، یعنی خارجی داخلی کے۔ لہذا قاعدہ ھب متساوی ہوا قاعدہ زج کے، و مثلث ھأب متساوی ہوا مثلث دزج کے۔ تو دحھ کو جدا کر دیا، تو باقی منحرف أبحد متساوی ہوا باقی منحرف ھحجز کے۔ پھر مثلث حبج کو دونوں میں جمع کیا، تو کل أبجد متساوی ہوا کل ھبجز کے۔ لہذا اشکال متوازئ اضلاع جو ایک قاعدہ پہ ایک ہی خطوط متوازی کے درمیان بنیں ہوں، تو وہ آپس میں متساوی ہوں گی۔

# مسئلہ ۳٦

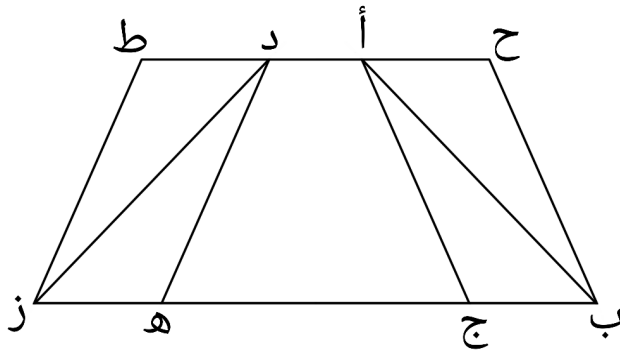
اشکال متوازئ اضلاع جو قاعدات متساوی پہ ایک ہی متوازیات کے درمیان ہوں، تو وہ متساوی ہوں گی۔

فرض کرو کہ أبجد و ھزحط متوازیات اضلاع ہیں، جو قاعدات متساوی بج و زح پہ ہیں، و ایک ہی متوازیات أط و بج کے درمیان ہیں۔ میں کہتا ہوں کہ أبجد متساوی ہے ھزحط کے۔ تو ب کو ھ میں و ج کو ط میں ملایا۔ و چونکہ بج متساوی ہے زح کے، لیکن زح متساوی ہے ھط کے، تو بج متساوی ہوئی ھط کے۔ و وہ متوازی بھی ہیں، و ھب و طج ان میں ملی ہیں۔ لیکن متساوی و متوازی خطوط کے ایک ہی جوانب میں ملی ہوئی خطوط بھی متساوی و متوازی ہوتی ہیں۔ لہذا ھبجط شکل متوازئ اضلاع ہے، و أبجد کے متساوی ہے، کیونکہ اس کا قاعدہ بج وہی ہے و انہیں متوازیات کے درمیان ہے یعنی بح و أط کے۔ تو ایسے ہی ھزحط بھی متساوی ہے ھبجط کے۔ لہذا اشکال متساوئ اضلاع أبجد متساوی ہوئی ھزحط کے۔
لہذا اشکال متوازئ اضلاع جو متساوی قاعدات پہ ایک ہی متوازیات کے درمیان ہوں، تو وہ متوازی ہوں گی۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۳۷

مثلثات جو ایک ہی قاعدہ پہ ایک ہی متوازیات کے درمیان بنے ہوں، تو وہ متساوی ہیں۔
فرض کرو کہ أبج و دبج دو مثلثات ہیں، ایک ہی قاعدہ بج پہ ایک ہی متوازیات أد و بج کے درمیان۔ میں کہتا ہوں کہ أبج متساوی ہے دبج کے۔ تو أد کو دونوں جوانب میں ھ و ز

تک نکالا، و ب سے جأ کے متوازی بھ بنایا، و ج سے بد کے متوازی جز بنایا۔ لہذا ھبجأ و دبجز دونوں متوازیات اضلاع ہوئے و آپس میں متساوی بھی، کیونکہ وہ ایک قاعدہ بج پہ ایک ہی متوازیات بج و ھز کے درمیان ہیں۔ و مثلث أبج نصف ہے ھبجأ کا، کیونکہ قطر أب نے ھبجأ کو نصف میں کاٹا ہے۔ و مثلث دبج نصف ہے دبجز کا، کیونکہ دج نے دبجز کو نصف میں کاٹا ہے۔ لہذا مثلث أبج متساوی ہے مثلث دبج کے۔

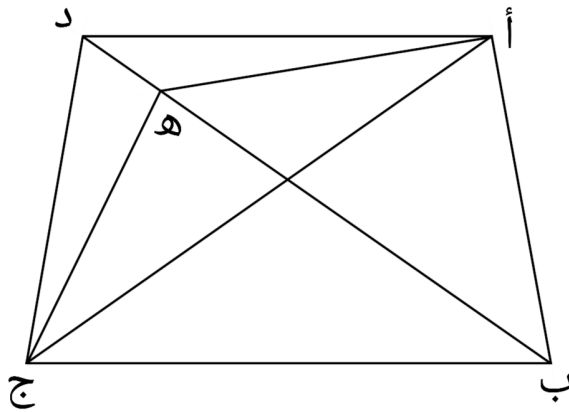
لہذا مثلثات جو ایک ہی قاعدہ پہ ایک متوازیات کے درمیان ہوں، تو وہ متساوی ہوں گے۔ و یہی ثابت کرنا تھا۔

# مسئلہ ۳۸

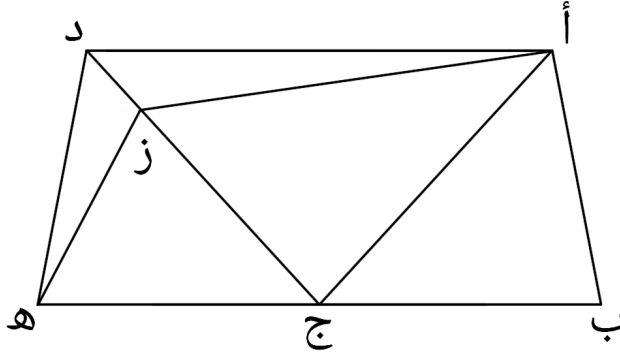
مثلثات جو قاعدات متساوی پہ ایک ہی متوازیات کے درمیان ہوں، تو وہ آپس میں متساوی ہوں گے۔

فرض کرو کہ أبج و دھز دو مثلثات ہیں، جو قاعدات متساوی بج و ھز پہ ایک ہی متوازیات بز و أد کے درمیاں ہیں۔ میں کہتا ہوں کہ مثلث أبج متساوی ہے دھز کے۔ تو أد کو دونوں جوانب میں ح و ط تک نکالا، و ب سے جأ کے متوازی بح بنایا، و ز سے دھ کے متوازی زط بنایا۔ لہذا حبجأ و دھزط دونوں متوازیات اضلاع ہوئے، و آپس میں متساوی بھی ہوئے۔ کیونکہ وہ متساوی قاعدات بج و ھز پہ ایک ہی متوازیات بز و طح کے درمیان ہیں۔ و مثلث أبج متوازئ اضلاع حبجأ کا نصف

ہے، کیونکہ قطر أب نے اس کو نصف میں کاٹا ہے۔ و مثلث زھد متوازیٔ اضلاع دھزط کا نصف ہے، کیونکہ قطر دز نے اس کو نصف میں کاٹا ہے۔ لہذا مثلث أبج متساوی ہوا دھز کے۔
لہذا مثلثات جو قاعدات متساوی پہ ایک ہی متوازیات کے درمیان ہوں، تو آپس میں متساوی ہوں گے۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۳۹

مثلثات متساوی جو ایک ہی قاعدہ پہ ایک ہی جانب ہوں، تو وہ ایک ہی متوازیات کے درمیان ہیں۔

فرض کرو کہ أبج و دبج دو متساوی مثلثات ہیں، جو ایک ہی قاعدہ پہ ایک جانب میں ہیں۔ میں کہتا ہوں کہ وہ ایک ہی متوازیات کے درمیان ہیں۔ تو أ کو د میں ملایا۔ میں کہتا ہوں کہ أد متوازی ہے بج کے۔ کیونکہ اگر ایسا نہیں، تو أ سے خط مستقیم بج کے متوازی أھ بنایا، و ھ کو ج میں ملایا۔ لہذا مثلث أبج متساوی ہوا مثلث ھبج کے، کیونکہ وہ ایک ہی قاعدہ بج پہ ایک ہی متوازیات کے درمیان ہیں۔ لیکن أبج متساوی ہے دبج کے۔ لہذا دبج متساوی ہوا ھبج کے، یعنی بڑا چھوٹے کے، جو کہ مستحیل ہے۔ لہذا أھ متوازی نہیں ہے بج کے۔ ایسے ہی ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ أد کے سوا کوئی بھی خط مستقیم اس کے متوازی نہیں ہے۔ لہذا أد متوازی ہے بج کے۔
لہذا متساوی مثلثات جو ایک ہی قاعدہ پہ ایک ہی جانب میں ہوں، تو وہ ایک ہی متوازیات کے درمیان ہوں گے۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

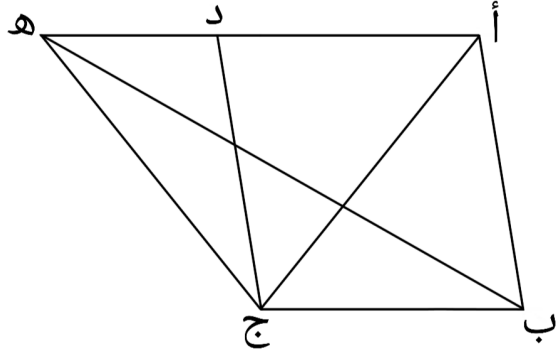
# مسئلہ ۴۰

مثلثات متساوی جو قاعدات متساوی پہ ایک ہی جانب میں ہوں، تو وہ ایک ہی متوازیات کے درمیان ہوں گے۔

فرض کرو کہ قاعدات متساوی بج و جھ پہ أبج و جدھ مثلثات متساوی ہیں حسب ترتیب، ایک ہی جانب میں۔ میں کہتا ہوں کہ وہ ایک ہی متوازیات کے درمیان ہیں۔ تو أ کو د میں ملایا۔ میں کہتا ہوں کہ أد متوازی ہے بھ کے۔

کیونکہ اگر ایسا نہیں، تو أ سے بھ کے متوازی خط أز بنایا، و ز کو ھ میں ملایا۔ لہذا مثلث أبج متساوی ہوا مثلث زجھ کے۔ کیونکہ وہ قاعدات متساوی پہ ایک ہی متوازیات بھ و أز کے درمیان ہیں۔ لیکن معلوم ہے کہ مثلث أبج متساوی ہے دجھ کے۔ لہذا دجھ متساوی ہوا زجھ کے، یعنی بڑا چھوٹے کے، جو کہ مستحیل ہے۔ لہذا أز متساوی نہیں ہے بھ کے۔ ایسے ہی ہم دکھا سکتے ہیں کہ أد کے علاوہ کوئی بھی اس کے متساوی نہیں ہے۔ لہذا أد متساوی ہے بھ کے۔

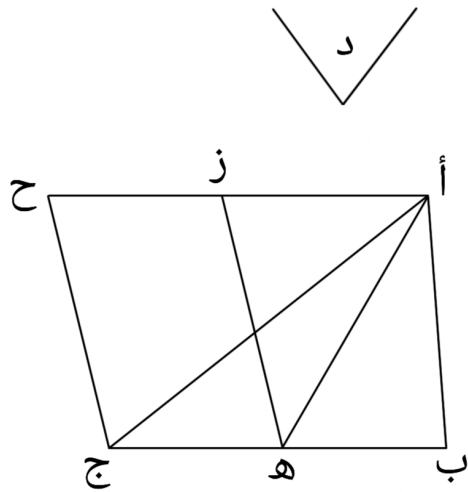
لہذا مثلث متساوی جو قاعدات متساوی پہ ایک ہی جانب میں ہوں، تو وہ ایک ہی متوازیات کے درمیان ہوں گے۔ و ہہی چیز ہے جو ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۴۱

اگر متوازئ اضلاع کا قاعدہ و مثلث کا قاعدہ ایک ہی ہوں، و وہ ایک ہی متوازیات کے درمیان ہوں، تو متوازئ اضلاع اس مثلث کا دو گنا ہوگا۔

فرض کرو کہ متوازیٔ اضلاع أبجد و مثلث ھبج کا قاعدہ بج ایک ہی ہے، و دونوں ایک ہی متوازیات بج و أھ کے درمیان ہیں۔ میں کہتا ہوں کہ متوازی اضلاع أبجد دو گنا ہے مثلث بھج کا۔ تو أ کو ج میں ملایا تو مثلث أبج متساوی ہوا مثلث ھبج کے۔ کیونکہ وہ دونوں ایک ہی قاعدہ بج پہ ہیں، و ایک ہی متوازیات بح و أھ کے درمیان ہیں۔ لیکن متوازیٔ اضلاع أبجد دو گنا ہے مثلث أبج کے، کیونکہ قطر أج نے اسے نصف میں کاٹا ہے۔ لہذا متوازیٔ اضلاع أبجد مثلث ھبج کا دو گنا ہوا۔

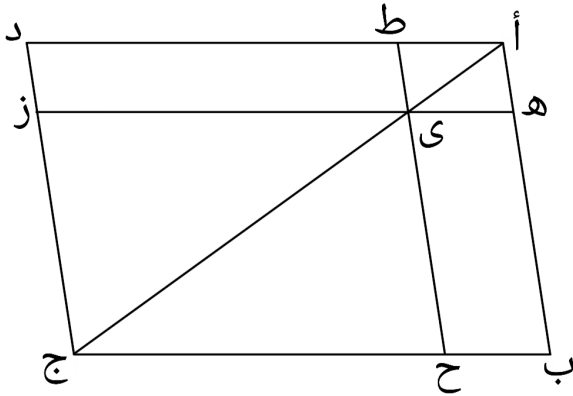
لہذا اگر متوازیٔ اضلاع و مثلث کا قاعدہ ایک ہی ہو، و وہ ایک ہی متوازیات کے درمیان ہوں، تو متوازیٔ اضلاع دو گنا ہوگا مثلث کا۔ یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۴۲

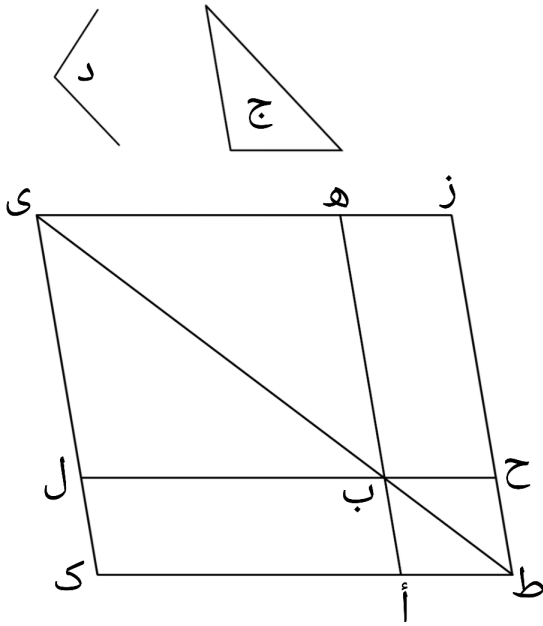
معلوم مثلث کے متساوی ایک متوازیٔ اضلاع بنانا، جو ایک معلوم زاویۂ مستقیم اضلاع کو شامل ہو۔

فرض کرو کہ أبج معلوم مثلث ہے، و د معلوم زاویۂ مستقیم اضلاع ہے۔ تو ایسا متوازیٔ اضلاع بنانا مطلوب ہوا جو مثلث أبج کے متساوی ہو و زاویہ د کو شامل ہو۔ تو بج کو ھ سے نصف میں کاٹا، و ھ کو أ میں ملایا۔ و خط مستقیم ھج کے نقطہ ھ پہ زاویہ د کے متساوی جھز بنایا۔ و أ سے بج کے متوازی أح بنایا۔ و ج سے ھز کے متوازی جح بنایا۔ لہذا زھجح ایک متوازیٔ اضلاع ہوا۔ و

چونکہ ب‌ھ متساوی ہے ھج کے، تو مثلث أب‌ھ متساوی ہوا أھج کے، کیونکہ وہ متساوی قاعدات ب‌ھ و ھج پہ ایک ہی متوازیات بج و أح کے درمیان ہیں۔ لہذا مثلث أبج دو گنا ہوا مثلث أھج کا۔ و متوازئ اضلاع زھجح بھی مثلث أج‌ھ کا دو گنا ہوا۔ کیونکہ ان کا قاعدہ ایک ہی ہے، و ایک ہی متوازیات کے درمیان ہیں۔ لہذا متوازئ اضلاع زھجح متساوی ہوا مثلث أبج کے، و اس میں زاویہ جھز بھی ہے، جو متساوی ہے معلوم زاویہ د کے۔
لہذا متوازئ اضلاع زھجح بن گیا، جو متساوی ہے معلوم مثلث أبج کے و شامل ہے د کے متساوی زاویہ جھز کو۔ و یہی کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۴۳

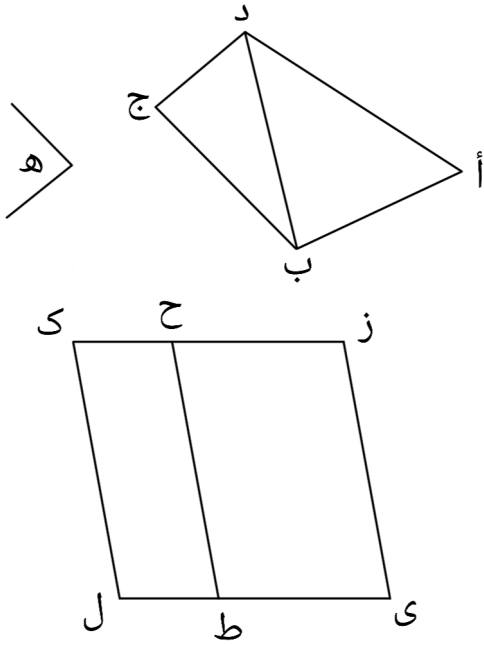
کسی بھی متوازئ اضلاع کے تتمات جو قطر سے ہوں، تو آپس میں متساوی ہوں گے۔

فرض کرو کہ أبجد متوازئ اضلاع ہے، و أج اس کا قطر ہے۔ و فرض کرو کہ ھط و زح متوازئ اضلاع ہیں أج پہ، و بی و ید جن کو تتمات کہا گیا ہے متوازئ اضلاع ہیں أج سے۔ میں کہتا ہوں کہ تتمہ بی متساوی ہے تتمہ ید کے۔ چونکہ أبجد متوازئ اضلاع ہے، و أج اس کا قطر ہے، تو مثلث أبج متساوی ہوا مثلث أجد کے۔ پھر چونکہ ھط متوازئ اضلاع ہے، و أی اس کا قطر ہے، تو مثلث أھی متساوی ہوا مثلث أطی کے۔ تو ایسے ہی مثلث یزج بھی متساوی ہوا یحج کے۔ لہذا چونکہ أھی متساوی ہے أطی کے، و یزج یحج کے، تو مثلث أھی و یحج ایک ساتھ متساوی ہوئے مثلث أطی و یزح کے ایک ساتھ۔ و کل مثلث أبج متساوی ہوا کل مثلث أدج کے۔ لہذا باقی تتمہ بی متساوی ہوا باقی تتمہ ید کے۔
لہذا کسی بھی متوازئ اضلاع کے تتمات جو قطر سے ہوں، تو آپس میں متساوی ہوں گے۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۴۴

معلوم خط مستقیم پہ معلوم مثلث کے متساوی ایک متوازئ اضلاع واقع کرنا جو ایک معلوم زاویۂ مستقیم اضلاع کو شامل ہو۔

فرض کرو کہ أب معلوم خط مستقیم ہے، و ج معلوم مثلث ہے، و د معلوم زاویۂ مستقیم اضلاع ہے۔ تو خط مستقیم أب پہ مثلث ج کے متساوی زاویہ د کو شامل ایک متوازئ اضلاع واقع کرنا مطلوب ہوا۔ تو مثلث ج کے متساوی متوازئ اضلاع بھزح بنایا، جو شامل ہے د کے متساوی مثلث ھبح کو۔ و اسے ایسے بنایا کہ بھ أب کی سیدھ میں آیا۔ و زح کو ط تک نکالا، و أ کو ط میں ملایا بح یا ھز کے متوازی، و ط کو ب میں ملایا۔ و چونکہ طز واقع ہے دو اضلاع متوازی أط و ھز پہ، تو زوایا أطز و طزھ ایک ساتھ متساوی ہوئے دو قائمات کے۔ لہذا بطح و حزھ دو قائمات سے چھوٹے ہوئے۔ و دو قائمات سے چھوٹے سے غیر نہایہ تک نکلنے والیاں آپس میں ملتی ہیں۔ لہذا طب و زھ کو نکالنے پہ وہ ملیں گی۔ تو انہیں نکالا جو ی پہ ملیں۔ و ی سے ھأ یا زط کے متوازی یک بنایا۔ و طأ و حب کو نکالا نقاط ک و ل تک۔ لہذا طکیز متوازئ اضلاع ہوا و طی اس کا قطر۔ و أح و لھ متوازئ اضلاع ہیں، و کب و بز تتمات ہیں طی سے۔ لہذا کب متساوی ہوا بز کے۔ لیکن بز متساوی ہے ج کے۔ لہذا کب بھی متساوی ہوا ج کے۔ پھر چونکہ زاویہ حبھ متساوی ہے أبل کے، لیکن حبھ متساوی ہے د کے بھی، تو أبل متساوی ہوا د کے۔

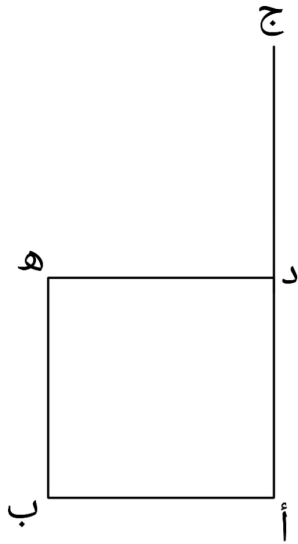
لہذا متوازئ اضلاع کب جو متساوی ہے معلوم مثلث ج کے، واقع ہوا معلوم خط مستقیم أب پہ و زاویہ أبل کو شامل ہے جو د کے متساوی ہے۔ یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۴۵

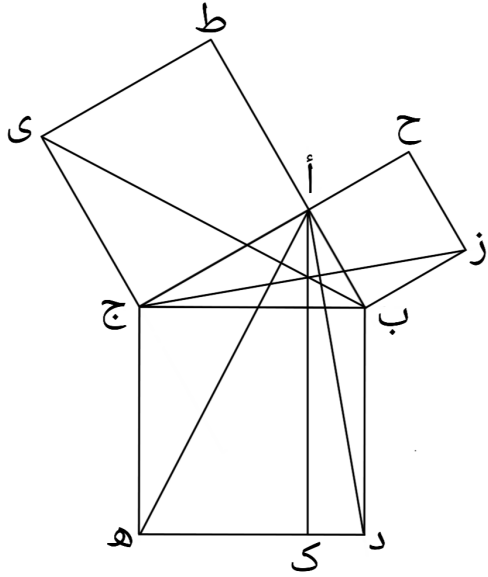
معلوم شکل مستقیم اضلاع کے متساوی معلوم زاویۂ مستقیم اضلاع کو شامل متوازیٔ اضلاع بنانا۔

فرض کرو کہ أبجد معلوم شکل مستقیم اضلاع ہے، و ھ معلوم زاویۂ مستقیم اضلاع ہے۔ تو شکل مستقیم اضلاع أبجد کے متساوی معلوم زاویہ ھ کو شامل متوازیٔ اضلاع بنانا مطلوب ہوا۔ تو د کو ب میں ملایا، و زاویہ أبد کے متساوی متوازیٔ اضلاع زط بنایا جو زاویہ طیز کو شامل ہے جو ھ کے متساوی ہے، و مثلث دبج کے متساوی متوازیٔ اضلاع حل بنایا جو ھ کے متساوی زاویہ حطل کو شامل ہے۔ و انہیں خط مستقیم حط پہ واقع کیا۔ و زاویہ ھ چونکہ طیز و حطل میں سے ہر ایک کے متساوی ہے، تو طیز بھی حطل کے متساوی ہوا۔ پھر یحط دونوں میں جمع کیا۔ لہذا زیط و یطح متساوی ہوئے یطح و حطل کے۔ لیکن زیط و یطح متساوی ہیں دو قائمات کے۔ لہذا یطح و حطل بھی دو قائمات کے متساوی ہوئے۔ لہذا دو خطوط مستقیم یط و طل جو ایک ہی جانب واقع نہیں ہیں، وہ کسی خط مستقیم حط سے اس کے نقطہ ط پہ دو قائمات کے متساوی زوایا جار بنائے ہیں۔ لہذا یط طل کی سیدھ میں ہے۔ و چونکہ خط مستقیم طح واقع ہے متوازیات یل و زح پہ، تو زوایا متبادل لطح و طحز متساوی ہوئے۔ پھر دونوں میں طحک کو جمع کیا۔ لہذا لطح و طحک متساوی ہوئے طحز و طحک کے۔ لیکن لطح و طحک متساوی ہیں دو قائمات کے۔ لہذا طحز و طحک بھی دو قائمات کے متساوی ہوئے۔ لہذا زح حک کی سیدھ مین ہوا۔ و چونکہ زی متساوی و متوازی ہے طح کے، و طح لک کے، تو یز متساوی و متوازی ہوا لک کے۔ و خطوط مستقیم یل و زک ایک ہی جوانب میں ان سے ملیں ہیں۔ لہذا یل و زک بھی

متساوی و متوازی ہیں۔ لہذا یزکل متوازئ اضلاع ہوا۔ و چونکہ مثلث أبد متساوی ہے متوازئ اضلاع زط کے، و دبج حل کے، تو کل شکل مستقیم اضلاع أبجد متساوی ہوئی متوازئ اضلاع یزکل کے۔
لہذا شکل مستقیم اضلاع أبجد کے متساوی متوازئ اضلاع یزکل بن گیا جو ھ کے متساوی زاویہ زیل کو شامل ہے۔

# مسئلہ ۴۶

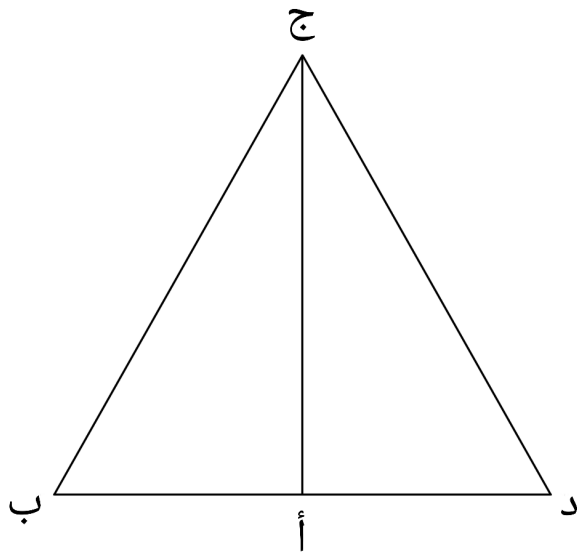
معلوم خط مستقیم پہ مربع بنانا۔

فرض کرو کہ أب معلوم خط مستقیم ہے۔ تو خط مستقیم أب پہ مربع بنانا مطلوب ہوا۔ تو خط مستقیم أب کے نقطہ أ پہ زاویۂ قائمہ سے خط مستقیم أج بنایا، و أب کے متساوی أد کاٹا، و د سے أب کے متوازی دھ بنایا، و ب سے أد کے متوازی بھ بنایا۔ لہذا أدھب متوازی اضلاع ہوا۔ لہذا أب متساوی ہے دھ کے، و أد بھ کے۔ لیکن أب متساوی ہے أد۔ لہذا چاروں اضلاع بأ و أد و دھ و ھب آپس میں متساوی ہوئے۔ لہذا متوازئ اضلاع أدھب متساوئ اضلاع ہوا۔ و میں کہتا ہوں کہ وہ قائمِ زاویہ بھی ہوا، کیونکہ خط مستقیم أد واقع ہے أب و دھ پہ، تو بأد و أدھ متساوی ہوئے دو قائمات کے۔ لیکن بأد قائمہ ہے، تو أدھ بھی قائمہ ہوا۔ اشکال متوازئ اضلاع میں اضلاع متقابل و زوایا متقابل متساوی ہوتے ہیں۔ لہذا زوایا متقابل أبھ و بھد میں سے ہر ایک قائمہ ہوا۔ لہذا أدھب قائم زاویہ ہوا۔ و اس کا مستقیم اضلاع ہونا ثابت ہو چکا ہے۔
لہذا وہ ایک مربع ہے، جو ایک خط مستقیم أب پہ بنا ہے۔ و یہی چیز ہے جسے ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۴۷

مثلث قائم زاویہ میں مربع جو قائمہ کے مقابل ضلع پہ ہو وہ متساوی ہوتا ہے ان مربعات جو قائمہ کو گھیرنے والے اضلاع پہ ہوں۔

تو فرض کرو کہ أبج ایک مثلث قائم زاویہ ہے، جس میں ایک زاویہ بأج قائمہ ہے۔ میں کہتا ہوں کہ مربع جو بج پہ ہے وہ متساوی ہے ان مربعات کے جو بأ و أج پہ ہیں۔ تو بج پہ مربع بدھج بنایا، و أب و أج پہ حب و طج بنایا۔ و أ سے بد یا جھ کے متوازی ک تک خط بنایا۔ و أ کو د میں و ز کو ج میں ملایا۔ و چونکہ زوایا بأج و بأح میں سے ہر ایک قائمہ ہے، تو دو خطوط مستقیم أج و أح جو ایک ہی جانب میں نہیں ہیں، تو کسی خط مستقیم بأ سے اسی کے نقطہ أ پہ دو زوایا جار بنایا جو متساوی ہیں دو قائمات کے۔ لہذا جأ سیدھ میں ہے أح کی۔ و ایسے ہی بأ سیدھ میں ہے أط کی۔ و چونکہ زاویہ دبج متساوی ہے زبأ کے کیونکہ دونوں قایمات ہیں۔ تو أبج کو دونوں میں جمع کیا۔ لہذا کل دبأ متساوی ہوا کل زبج کے۔ و چونکہ دب متساوی ہے بج کے و زب بأ کے، تو دب و بأ متساوی ہوئے جب و بز کے حسب ترتیب۔ و زاویہ دبأ متساوی ہے زاویہ زبج کے۔ لہذا قاعدہ أد متساوی ہوا قاعدہ زج کے، و مثلث أبد متساوی ہے زبج۔ و متوازئ اضلاع بک دو گنا ہے مثلث أبد کا۔ کیونکہ ان کا قاعدہ بج ایک ہی ہے و وہ ایک ہی متوازیات بد و أک کے درمیان ہیں۔ و مربع جب دو گنا ہے مثلث زبج کے۔ کیونکہ ان کا قاعدہ زب ایک ہی ہے، و وہ ایک ہی متوازیات زب و حج کے درمیان ہیں۔ لہذا متوازئ اضلاع بک بھی متساوی ہوا بح کے۔ ایسے ہی أ کو ھ میں و ب کو ی میں ملایا، تو دکھایا جا سکتا ہے کہ متوازئ اضلاع جک متساوی ہے مربع طج کے۔ لہذا کل مربع بدھج متساوی ہوا دو مربعات

حب و طج کے۔ و مربع بدھج بج پہ ہے، و مربعات حب و طج ہیں بأ و أج پہ۔ لہذا مربع جو ضلع بج پہ ہے وہ دو گنا ہے ان مربعات سے جو أب و أج پہ ہیں۔
لہذا مثلث قائم زاویہ میں قائمہ کے مقابل ضلع پہ جو مربع ہے وہ متساوی ہے ان مربعات کے جو قائمہ کو گھیرے ہیں۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

# مسئلہ ۴۸

اگر مثلث کے ایک ضلع کا مربع متساوی ہے باقی دو اضلاع کے مربعات کے، تو جو زاویہ باقی اضلاع سے گھرا ہے وہ قائمہ ہے۔

تو فرض کرو کہ مثلث أبج کے ضلع بج کا مربع متساوی ہے اضلاع بأ و أج کے مربعات کے۔ میں کہتا ہوں کہ زاویہ بأج قائمہ ہے۔ تو خط مستقیم أج سے اس کے نقطہ أ پہ قائمہ سے خط أد بنایا، و أد کو بأ کے متساوی رکھا، و د کو ج میں ملایا۔ چونکہ دأ متساوی ہے أب کے، تو دأ کا مربع متساوی ہوا أب کے مربع کے۔ تو دونوں میں أج کا مربع جمع کیا۔ تو دو مربعات دأ و أج متساوی ہوئے دو بأ و أج کے۔ لیکن جو دج پہ ہے وہ متساوی ہوا اس کے جو دأ و أج پہ ہے، کیونکہ زاویہ دأج قائمہ ہے۔ و لیکن بج متساوی ہے بأ و أج کے، کیونکہ فرض کیا ہے۔ لہذا دج کا مربع متساوی ہے بج کے مربع کے۔ لہذا ضلع دج متساوی ہوا ضلع بج کے۔ و چونکہ دأ متساوی ہے أب کے، و أج مشترک ہے، تو دأ و أج متساوی ہیں بأ و أج کے۔ و قاعدہ دج متساوی ہے قاعدہ بج کے۔ لہذا زاویہ دأج متساوی ہوا زاویہ بأج کے۔ لیکن دأج قائمہ ہے۔ لہذا بأج بھی قائمہ ہوا۔

لہذا اگر مثلث کے ایک ضلع کا مربع متساوی ہے باقی دو اضلاع کے مربعات کے، تو زاویہ جو باقی اضلاع سے گھرا ہے وہ قائم ہے۔ و یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔